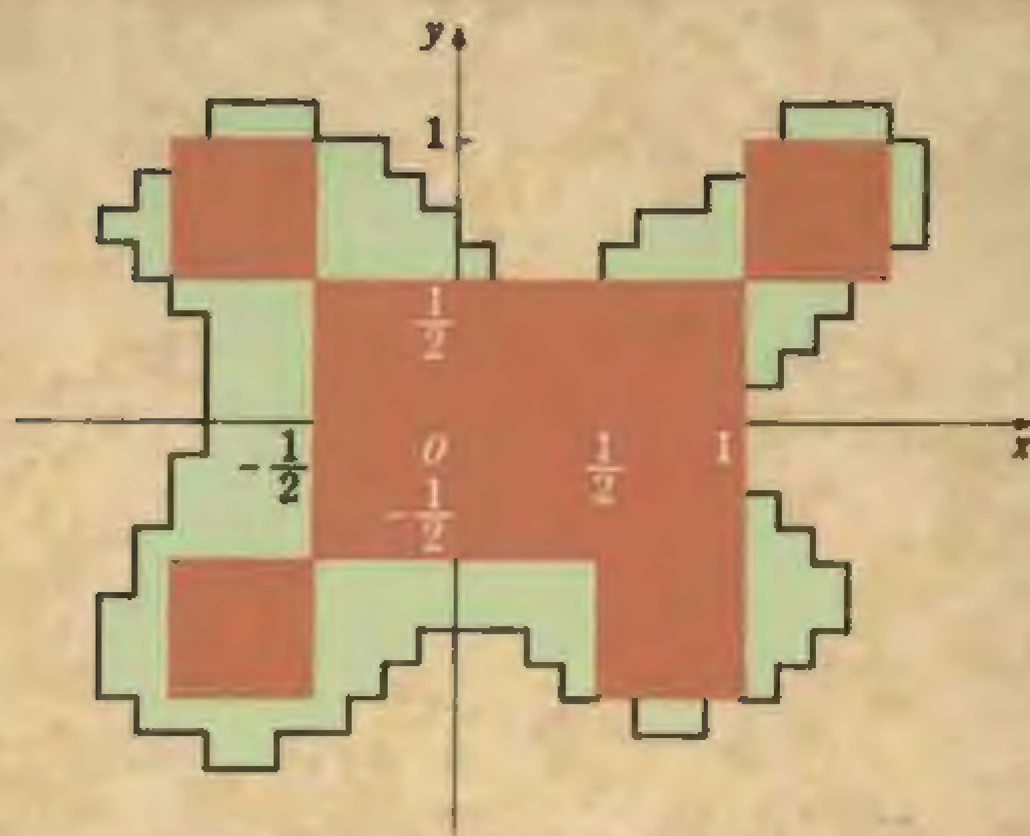
TURING 图灵数学·统计学丛书 21







An Introduction to Calculus

微积分入门 II

多元微积分

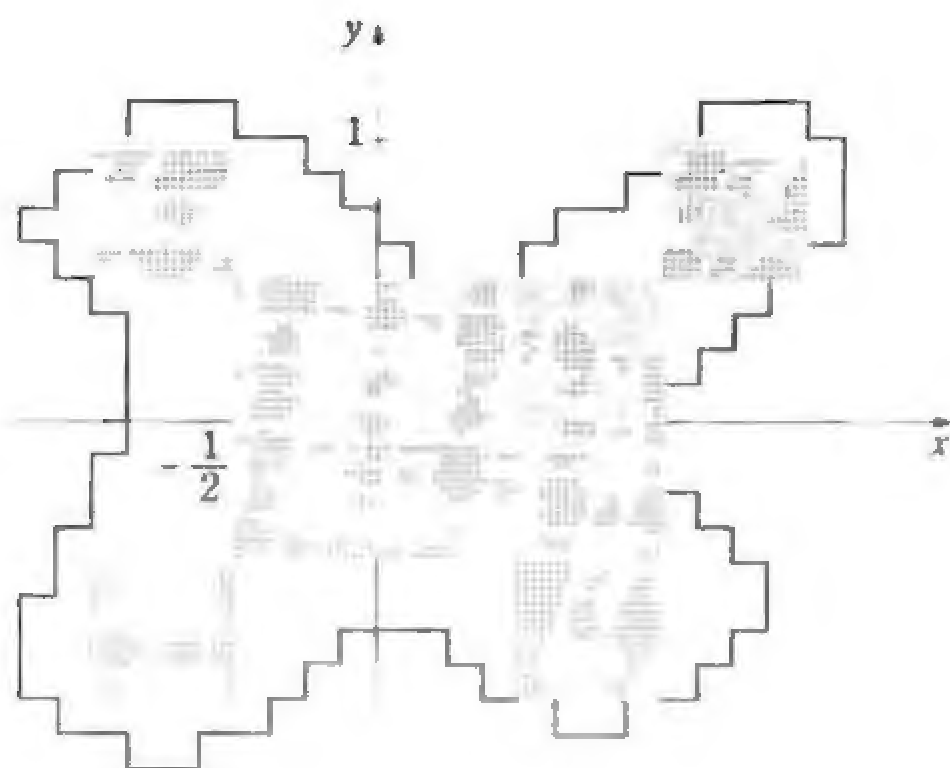
[日] 小平邦彦 著

裴东河 译

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS



TURING 图灵数学·统计学丛书 21



An Introduction to Calculus
微积分入门 II
多元微积分

[日]小平邦彦 著
裴东河 译

人民邮电出版社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

微积分入门 II：多元微积分/（日）小平邦彦著；裴东河译．—北京：人民邮电出版社，2008．8

（图灵数学·统计学丛书）

书名原文：An Introduction to Calculus

ISBN 978-7-115-18373-6

Ⅰ．微… Ⅱ．①小…②裴… Ⅲ．微积分-高等学校-教材 Ⅳ．O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 091944 号

内 容 提 要

本书是由一位世界级数学大师倾注了极大的热情和精力，为有志于认真、系统地学习微积分的学生撰写的一本优秀教材．书中内容涉及多元微积分，包括：多元函数，多元微分、多元积分的法则，以及曲线和曲面．作者首先使用积分记号，从 Arzelà 定理导出微积分定理，然后详细介绍定义在矩形上的多元函数的积分和一般情况下的多元函数的积分，最后导出曲线长度公式和曲面面积公式．

本书逻辑严密，采用的大量图示增强了表述的直观性，可作为高等院校本科和专科学生学习微积分的教材或参考书．

图灵数学·统计学丛书

微积分入门 II：多元微积分

◆ 著　[日] 小平邦彦
　译　裴东河
　责任编辑　明永玲

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址：http://www.ptpress.com.cn
　北京铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
　印张：15
　字数：299 千字　　2008 年 8 月第 1 版
　印数：1–4 000 册　　2008 年 8 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2006-7562 号

ISBN 978-7-115-18373-6/O1

定价：39.00 元

读者服务热线：(010)88593802　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010) 67171154

版权声明

译 者 序

本书是根据日本岩波书店 2003 年出版的《解析入門 II》翻译的. 本书的作者小平邦彦先生是为数不多的同时获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的著名数学家之一. 他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域都做出了卓越的贡献. 小平邦彦先生还是一位杰出的数学教育家, 培养了大量的优秀数学工作者.《解析入門 I》和《解析入門 II》就是在他晚年为后人留下的又一重要文化财富. 这是一套表述非常精炼而内容十分丰富的微积分教材 (原著分 I 卷和 II 卷, 包括附录、习题解答及提示、索引, 仅有 514 页). 由于它以严格的实数理论为基础, 因此与通常的微积分教材不同, 各部分内容简洁而流畅, 充分体现了作者的数学才识. 另外, 本书利用旋转的概念构造了三角函数的理论也是非常有趣的. 它不仅值得数学专业的学生研读, 而且对于需要微积分知识的理工科学生来说, 也是值得一读的好教材或参考书.

本书能得以顺利出版, 首先要感谢人民邮电出版社图灵公司的大力支持, 同时, 东北师范大学的黄松爱老师和研究生刘娜、孔令令、刘美含、刘赢、高瑞梅同学在翻译和校订中给予了大力帮助, 在此一并表示衷心感谢!

在翻译本书的过程中, 译者虽然尽最大努力尊重原文原意, 并尽可能避免直译产生的歧义, 但是由于才疏学浅, 难免存在翻译不当之处, 敬请广大读者批评指正, 以便再版时更正.

裴东河

2007 年 5 月

裴东河 日本北海道大学理学博士, 现为东北师范大学数学与统计学院教授, 博士生导师, 教育部“新世纪优秀人才支持计划资助项目”获得者. 主要研究方向是微分几何与微分拓扑等方面.

前　言

这本微积分入门教材是以刚刚结束高中数学学习, 步入大学后正式学习数学分析的人为对象而编写的. 希望本书能够成为从高中数学通向现代微积分学的桥梁.

分析学的基础是实数论, 本书首先详细而严密地论述了实数论. 最初, 我计划以高木先生的《解析概論》第 3 次修订版 (岩波书店) 和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》(内田老鹤圃) 等作为蓝本, 希望用读者容易接受的方式严谨地讲解传统的微积分学, 但是结果却在某些地方脱离了这一宗旨. 首先, 在第 2 章[①]三角函数的导入上, 本书从角度可以表示为平面的旋转的量的观点出发, 用指数函数 $e^{i\theta}$ 作为媒介定义了三角函数. 因为在进入微分学之前, 对三角函数进行严格的定义是非常必要的.

关于第 4 章的单变量函数的积分, 受高木先生著作[②] 的启示, 被积函数只限定在有至多有限个不连续点的情况, 而闭区间上具有不连续点的函数的积分都作为广义积分来处理. 在第 5 章中, 介绍了一致有界函数列的 Arzelà 逐项积分定理及由 Hausdorff 给出的初等证明. 这个定理自 Lebesgue 逐项积分定理的出现而被遗忘, 但在应用上非常有用. 在第 6 章中, 使用积分记号, 从 Arzelà 定理导出微积分定理.

在第 7 章中, 将详细介绍多重积分, 即多元函数的积分, 二元函数一般的情况则在第 8 章处理. 由于在一元函数的情况, 被积函数限定为至多具有有限个不连续点, 因此多元函数的情况也应进行简化. 为此, 第 7 章首先在矩形上定义连续函数的积分概念, 然后用 (平面上的) 任意邻域上的连续函数的积分定义广义积分. 从广义积分限定在被积函数是连续函数这一点来说, 它比传统的黎曼积分要狭窄, 但从它适用于任意邻域这一点来说, 又比黎曼积分宽广. 在第 8 章中同样定义了一般情况下的多重积分. 在多重积分中, 我们把重点放在了积分变量的变换公式的严格证明上. 一元函数的积分变量变换公式是直接从不定积分的讨论中导出的. 对于二元函数 $f(x,y)$, 满足 $F_{xy}(x,y)=f(x,y)$ 的函数 $F(x,y)$ 可以作为 $f(x,y)$ 的不定积分[③]. 7.3 节中双重积分的变量变换公式就是根据这种意义下的不定积分的考察获得的. 其出发点是无论如何也要设法把一元函数的积分变换公式的简洁证明, 推广到两变量的情况. 在第 8 章中, 通过对变量的个数采用归纳法, 证明了一般情况的

---

① 本书与姊妹篇《微积分入门 I》章节顺序连续编号, 第 1 章 ~ 第 5 章的内容见《微积分入门 I》.
——编者注

② 高木貞治《解析概論》, 改訂第 3 版, 岩波書店. pp.109-110. (中文版将由人民邮电出版社出版.
—— 编者注)

③ 龟谷俊司《解析学入門》, 朝倉書店, p.303.

多重积分的变量变换公式.

作为微积分的应用, 传统的方法是讲授曲线的长度和曲面的面积, 另外还讲授微分形式理论的初步知识. 但第 8 章已经超过了预定的篇幅, 只好忍痛割爱删除了微分形式理论部分, 在第 9 章中导出曲线长度公式和曲面面积公式后收尾.

现代数学受形式主义的影响很深, 强调数学是公理化构成的论证体系. 但我以为, 正如物理学是描述物理现象一样, 数学是描述客观存在的数学现象. 因此为了理解数学, 明确把握数学现象的直观是非常重要的. 我在撰写本书的过程中, 不仅在论证的严密性上, 而且在直观描述上都下了巨大的功夫.

向在本书的习题解答和提示的写作过程中付出辛勤劳动的前田博信氏表示衷心的感谢.

撰写本书过程中参考了高木先生的《解析概論》和藤原先生的《微分積分学 I》、《微分積分学 II》. 我想书中《解析概論》的影响应随处可见. 所有的术语都是以《岩波数学辞典第 3 版》为标准.

本书出版过程中得到了岩波书店编辑部荒井秀男先生的许多帮助, 借此机会向荒井先生表示衷心的感谢.

作 者

1990 年 12 月

《微积分入门 I》

目　录

目　录[①]

① 本书与姊妹篇《微积分入门 I》章节顺序连续编号, 第 1 章~第 5 章的内容见《微积分入门 I》.

——编者注

第6章　多 元 函 数

6.1　二 元 函 数

设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上点的集合. 如 1.6 节 a) 中定义所述, 平面 $\mathbf{R}^2$ 是直积集合 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, 即实数对 (ξ, η) 全体的集合. 如果属于 D 的每一个点 $P = (\xi, \eta)$ 分别与一个实数 ζ 相对应, 那么称这种对应为定义在 D 上的函数. 当 f 是定义在 D 上的函数时, 通过 f 与 $P = (\xi, \eta) \in D$ 相对应的实数 ζ 称为 f 在 $P = (\xi, \eta)$ 处的值. 用 $f(P)$ 或 $f(\xi, \eta)$ 表示:

$$\zeta = f(P) = f(\xi, \eta).$$

设 S 是 D 的任意子集, $f(P)(P \in S)$ 的全体构成的集合用 $f(S)$ 表示:

$$f(S) = \{f(P) | P \in S\}.$$

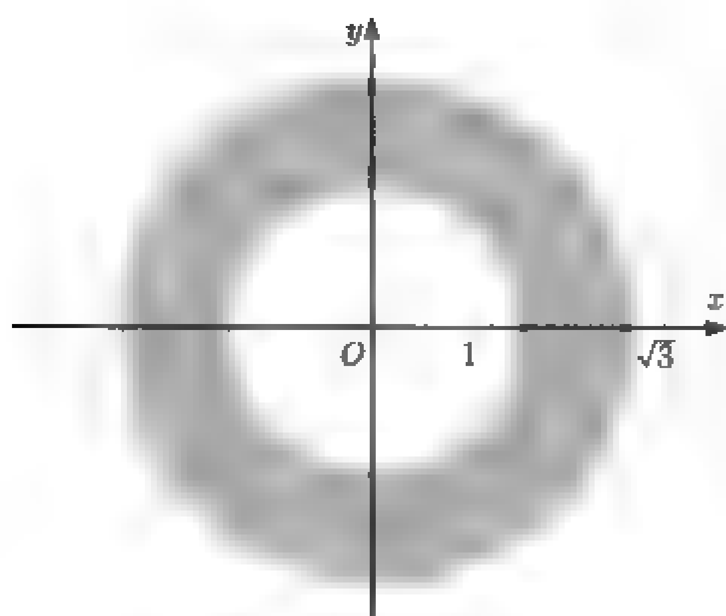
并且称 D 是函数 f 的定义域, f 的值 $f(P)$ 的全体构成的集合 $f(D)$ 称为函数 f 的值域.

函数 f 用 $f(x, y)$ 来表示, 称 x, y 为变量, $f(x, y)$ 是两个变量 x, y 的二元函数. 与此相对应, 2.1 节中引入的函数 $f(x)$ 称为单变量 x 的一元函数. 函数 $f(x, y)$ 中, x, y 只是一种符号, x, y 处可以代入属于 D 的任意点 $P = (\xi, \eta)$ 的坐标 ξ, η, 或者表示应当代入坐标 ξ, η 处的符号, 这与一元函数的情况相同. 以下根据一般的习惯, 将属于 D 的点的坐标也用 x, y 来表示. 因此属于 D 的点 $P = (\xi, \eta)$ 可以用 $P = (x, y)$ 表示. 令 $z = f(x, y)$, 称 z 是 x 和 y 的函数, x, y 是自变量, z 是因变量. 当 z 是自变量 x, y 的函数时, 虽然可以认为 "z 是随着 x, y 的变化而变化的量", 但在形式上用如上所述的方式来定义函数. 为了在实际论证时不出现错误, 严格的形式定义是有必要的.

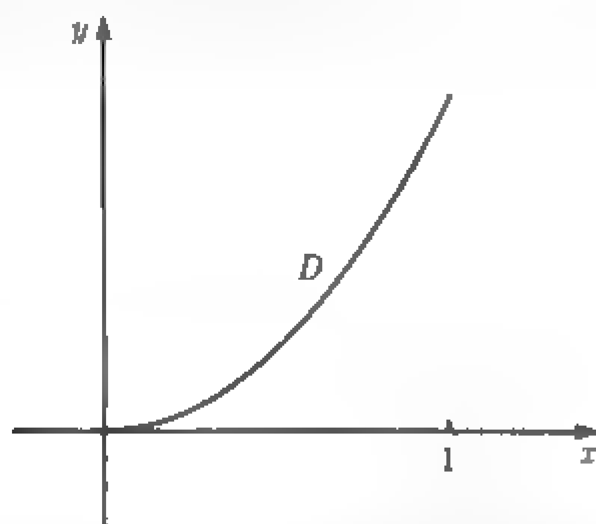
作为二元函数简单的例子有: 关于 x, y 的多项式, 如 $x^4 + y^4 - 4x^3y$; 有理式, 如 $2xy/(x^2 + y^2)$; 多项式的初等函数, 如 $\ln(1 - (x^2 + y^2 - 2)^2)$; 初等函数的有理式等. 关于 x, y 的多项式的定义域当然是平面 $\mathbf{R}^2$. 对数函数 ln 的定义域是 $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$, 所以 $\ln(1 - (x^2 + y^2 - 2)^2)$ 的定义域是 $|x^2 + y^2 - 2| < 1$, 即满足

$$1 < x^2 + y^2 < 3$$

的所有点 (x, y) 的集合, 即以原点 O 为中心, 以 1 为半径的圆周与以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆周中间的部分.



对于平面 $\mathbf{R}^2$ 的任意子集 D, 可以自由地讨论以 D 为定义域的二元函数 $f(x,y)$. 但是当 D 是极端 "狭窄" 集合时, 例如 $D=\{(x,y)|y=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 时, 定义在 D 上的函数 $f(x,y)$ 实际上是一元函数 $f(x,x^2)$.



例 6.1 "人为地构造" 两个变量 x,y 的函数的例子. 设实数 x,y, $0<x<1, 0<y<1$ 的十进制小数表示分别为

$$x=0.h_1h_2h_3\cdots h_n\cdots=\frac{h_1}{10}+\frac{h_2}{10^2}+\frac{h_3}{10^3}+\cdots+\frac{h_n}{10^n}+\cdots,$$

$$y=0.k_1k_2k_3\cdots k_n\cdots=\frac{k_1}{10}+\frac{k_2}{10^2}+\frac{k_3}{10^3}+\cdots+\frac{k_n}{10^n}+\cdots,$$

并且令

$$f(x,y)=0.h_1k_1h_2k_2\cdots h_nk_n\cdots=\frac{h_1}{10}+\frac{k_1}{10^2}+\frac{h_2}{10^3}+\frac{k_2}{10^4}+\cdots.$$

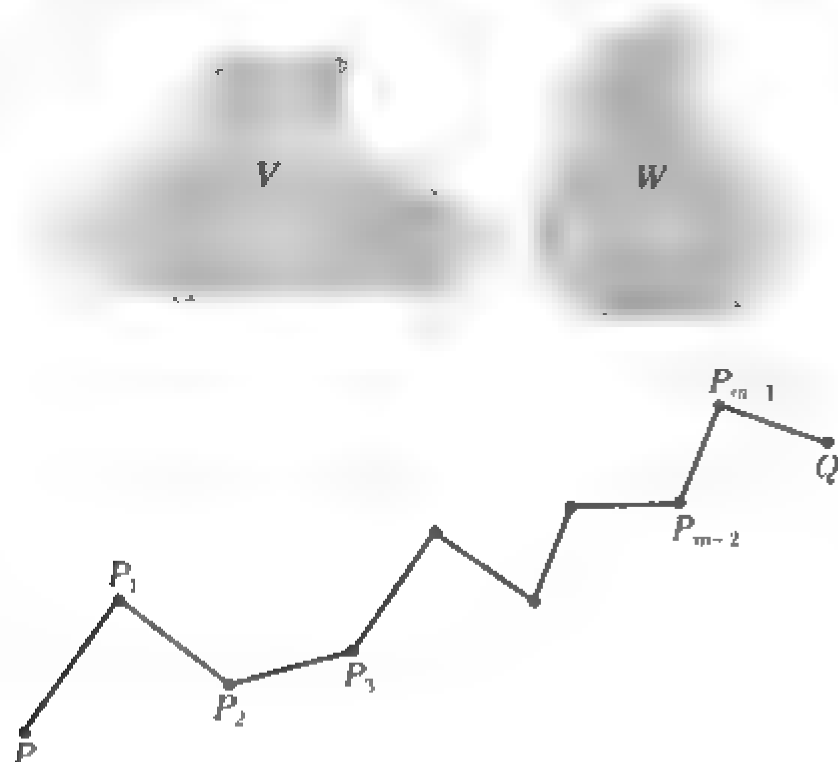
当 x 或 y 是有限小数, 取其用十进制小数表示时, 根据 1.4 节的 f), x,y 的十进制表示唯一确定, 并且 $f(x,y)$ 是在正方形内部: $D=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$ 的定义函数. 该函数的值域 $f(D)$ 是从开区间 (0, 1) 中除去形如

$$z=0.l_1l_2l_3\cdots l_{m-2}9l_m9l_{m+2}9\cdots l_{m+2n}9l_{m+2n+2}9\cdots$$

的所有无限小数而得到的集合.

a) 领域和闭领域

平面 $\mathbf{R}^2$ 上的开集 U 是两个不交的非空开集 V, W 的并集: $U = V \cup W, V \cap W = \varnothing$ 时, 若要考察定义在 U 上的函数 $f(x, y)$, 只须将 $f(x, y)$ 分别在 V 和 W 上考察即可. 当开集 U 不能表示为两个不交的非空开集的并集时, 称 U 是**连通的**(connected).



对于平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两点 P, Q, 把由有限个线段 $PP_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots, P_{m-1}Q$ 依次连接而成的集合, 即并集

$$L = PP_1 \cup P_1P_2 \cup P_2P_3 \cup \cdots \cup P_{m-2}P_{m-1} \cup P_{m-1}Q$$

称为连接两点 P 和 Q 的折线. *若属于开区间 U 内的任意两点 P, Q 都可以通过 U 内的折线连接, 则 U 是连通的.* [证明] 假设 U 不是连通的, 即 $U = V \cup W, V \cap W = \varnothing$, V, W 是非空开集. 任取点 $P \in V, Q \in W$, 则根据假设, U 内存在连接 P, Q 的折线:

$$L = \bigcup_{k=1}^{m} P_{k-1}P_k, \qquad P_0 = P, \qquad P_m = Q.$$

显然对某个 k, $P_{k-1} \in V, P_k \in W$ 成立. 令 $P_k = (u_k, v_k)$, 则

$$P_{k-1}P_k = \{R | R = (\lambda u_{k-1} + \mu u_k, \lambda v_{k-1} + \mu v_k),\ \mu = 1 - \lambda, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\},$$



并且 R 与 P_{k-1} 的距离为

$$r=|RP_{k-1}|=\mu\sqrt{(u_k-u_{k-1})^2+(v_k-v_{k-1})^2}=\mu|P_kP_{k-1}|.$$

因此, 如令 $\rho=|P_kP_{k-1}|$, 并且用 $P(r)$ 来表示 R, 则

$$P_{k-1}P_k=\{P(r)|0\leqslant r\leqslant\rho\}.$$

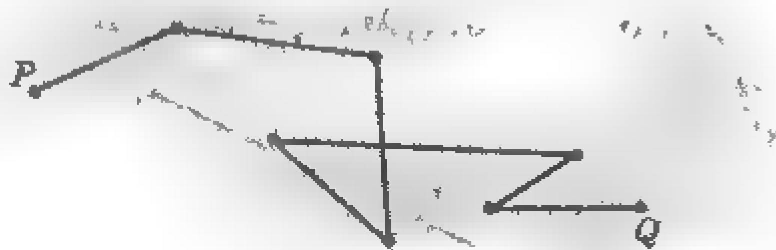
显然 $P(0)=P_{k-1}\in V, P(\rho)=P_k\in W$. 令满足 $P(r)\in V$ 的实数 $r, 0\leqslant r\leqslant\rho$ 的上确界为

$$s=\sup_{P(r)\in V} r.$$

若假设 $P(s)\in V$, 因为 V 是开集, 所以 V 包含 $P(s)$ 的 ε 邻域 $U_\varepsilon(P(s))$, $\varepsilon>0$. 从而, 若 $s\leqslant r<s+\varepsilon$, 则 $P(r)\in V$, 这与 s 的定义相矛盾. 因此 $P(s)\notin V$. 同理, 若假设 $P(s)\in W$, 则对于某一个正实数 $\varepsilon>0$, 当 $s-\varepsilon<r\leqslant s$ 时, $P(r)\in W$, 从而 $P(r)\notin V$, 这也与 s 的定义相矛盾. 因此 $P(s)\notin W$. 即 $P(s)\notin V\cup W=U$, 这与 $P(s)\in P_{k-1}P_k\subset U$ 相矛盾. 因此 U 是连通的. □

反之, 若 U **是连通开集, 则属于** U **的任意两点** P, Q **可以由** U **内的某一折线连接**. [证明] 如果在 U 内任取一点 $P\in U$, 并且设 V 是可以通过 U 内某一折线与 P 相连接的点 $Q\in U$ 的全体集合, 从 U 中将属于 V 的所有点除去后的集合记为 $W=U-V$. 那么只须证明 U 和 V 一致, 即 W 是空集即可. 为此只须验证 V 和 W 都是开集. 这是因为 $U=V\cup W, V\cap W=\varnothing$, 且 U 是连通的. 因为 U 是开集, 所以每一点 $Q\in U$ 分别具有 ε 邻域 $U_\varepsilon(Q)\subset U$. 任取点 $R\in U_\varepsilon(Q)$, 则线段 QR 显然属于 U, 所以如果 P 和 Q 能够由 U 内某折线连接, 那么 P 和 R 在 U 内就能够由某折线连接. 即若 $Q\in V$, 则 $R\in V$, 所以 $U_\varepsilon(Q)\subset V$. 因此 V 是开集. 同理, 如果 P 和 R 在 U 内能够由某个折线连接, 那么 P 和 Q 在 U 内也必能由某折线连接. 换言之, 若 $U_\varepsilon(Q)$ 和 V 有公共点 R, 则 $Q\in V$. 因此, 若 $Q\in W$, 则 $U_\varepsilon(Q)\subset W$, 即 W 也是开集. □

通过上面的证明可得, **开集** U **是连通的充分必要条件是属于** U **的任意两点** P, Q **都能够由属于** U **的某一折线连接**.

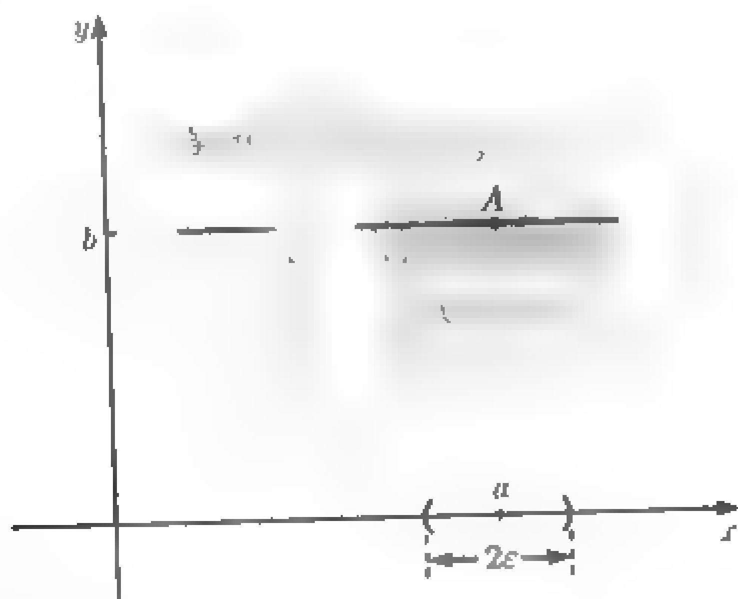


至此我们对连通的含义有了清楚的了解. 我们称连通开集为**领域**(domain, reg-

ion), 区域的闭包称为**闭领域**. 本书将主要讨论在领域以及闭领域上定义的函数.

点集 $D \subset \mathbf{R}^2$ 的内点全体构成的集合 U 称为 D 的**开核**(open kernel). 若 D 是闭领域, 则 D 的开核 U 是领域, 并且 D 是 U 的闭包: $D = [U]$. [证明] 假设 D 是某领域 Ω 的闭包: $D = [\Omega]$. 因为每一点 $P \in \Omega$ 是 D 的内点, 所以 $\Omega \subset U$. 因此 $D = [\Omega] = [U]$. 因为 U 是开集, 所以下面证明 U 是连通的即可. 假设 $U = V \cup W, V \cap W = \varnothing, V, W$ 是开集, 由于 Ω 是连通的且 $\Omega \subset V \cup W$, 所以 $\Omega \subset V$ 或 $\Omega \subset W$. 若 $\Omega \subset V$ 则 $W = W \cap D = W \cap [\Omega] \subset W \cap [V] = \varnothing$. 同理, 若 $\Omega \subset W$, 则 $V = \varnothing$. 因此, U 是连通的. □

假设 $f(x,y)$ 是定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的函数, $A = (a,b)$ 是属于 D 的点, 则 $f(x,b)$ 为在实数 ξ 处取值的关于 x 的函数, 其中 ξ 满足 $(\xi,b) \in D$. $f(x,b)$ 的定义域是 $\{\xi | (\xi,b) \in D\}$. 例如, 当 $D = \{(x,y) | y = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ 时, 若 $(\xi,b) \in D$, 则 $\xi = \sqrt{b}$, 所以若 $f(x,b)$ 只是定义在由一个实数 $\sqrt{b}$ 组成的集合 $\{\sqrt{b}\}$ 上, 其意义不大. 而当 D 是领域时, 只要 $|\xi - a| < \varepsilon$, 就能够确定满足 $(\xi,b) \in D$ 的正实数 ε, 所以 $f(x,b)$ 的定义域包含开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 并且 $f(x,b)$ 实际上是 x 的函数.



当我们考虑用常数 b 替换函数 $f(x,y)$ 的变量 y 而得到的关于 x 的函数 $f(x,b)$ 时, 通常会省略用 b 替代 y 的过程, 仍然用 y 表示常数. 此时, 称固定 y 后的函数 $f(x,y)$ 为关于 x 的函数. 显然这种说法也是以 "$z = f(x,y)$ 是随着 x 和 y 的变化而变化的量" 这一想法为背景的. 固定 x 后的 $f(x,y)$ 为关于 y 的函数, 也蕴含着同样的含义. 当 y 固定时, 若 $f(x,y)$ 是 x 的连续函数, 那么就称函数 $f(x,y)$ 关于 x 连续.

b) 极限

2.1 节中叙述的关于一元函数极限的讨论同样适用于二元函数的极限. 首先:

定义 6.1 设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的任意点集, $f(P) = f(x,y)$ 是定义在 D 上的函数, 并且 A 是 D 的聚点, α 是实数. 如果对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } 0 < |PA| < \delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(P) - \alpha| < \varepsilon \text{ 成立}, \tag{6.1}$$

则称当 $P \to A$ 时 $f(P)$ 收敛于 α, 并且称 α 是 $P \to A$ 时 $f(P)$ 的极限. 记为

$$\lim_{P \to A} f(P) = \alpha$$

或者

$$P \to A \text{ 时}, \quad f(P) \to \alpha.$$

(6.1) 式中 P 作为 D 中的点来考虑, 这与一元函数的情况一样. 把 A 假设为 D 的聚点是为了排除满足 $0 < |PA| < \delta(\varepsilon)$, 而 $P \notin D$ 的情况.

若 $P \to A$ 时, $f(P)$ 收敛于 α, 则对于收敛于 A 的所有的点列 $\{P_n\}, P_n \in D, P_n \neq A$ 对应的数列 $\{f(P_n)\}$ 收敛于 α. 这是显然的.

对于收敛于 A 的所有点列 $\{P_n\}, P_n \in D, P_n \neq A$, 若对应的数列 $\{f(P_n)\}$ 是收敛的, 则 $P \to A$ 时 $f(P)$ 收敛. 证明过程与 2.1 节中一元函数的情况相同. 根据这个结果, 与一元函数的情况相同, 可推导出 Cauchy 判别法.

定理 6.1 (Cauchy 判别法) 设 $f(P)$ 是定义在 D 上的函数, A 是 D 的聚点. 当 $P \to A$ 时, $f(P)$ 收敛的充分必要条件是对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } 0 < |PA| < \delta(\varepsilon),\ 0 < |QA| < \delta(\varepsilon), \text{ 就有 } |f(P) - f(Q)| < \varepsilon \text{ 成立}.$$

以下推导过程也和一元函数时相同: 当 $P \to A$ 时, 函数 $f(P)$ 和 $g(P)$ 同时收敛, 则它们的线性组合 $c_1 f(P) + c_2 g(P)$(c_1, c_2 为常数), 以及它们的积 $f(P)g(P)$ 也收敛, 并且

$$\lim_{P \to A}(c_1 f(P) + c_2 g(P)) = c_1 \lim_{P \to A} f(P) + c_2 \lim_{P \to A} g(P),$$

$$\lim_{P \to A}(f(P)g(P)) = \lim_{P \to A} f(P) \cdot \lim_{P \to A} g(P).$$

进而, 若 $\lim\limits_{P \to A} g(P) \neq 0$, 则商 $f(P)/g(P)$ 也收敛, 并且

$$\lim_{P \to A}(f(P)/g(P)) = \lim_{P \to A} f(P) / \lim_{P \to A} g(P).$$

c) 连续性

设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上任意点集, $f(P) = f(x, y)$($P = (x, y)$) 是定义在 D 上的函数, $A = (a, b)$ 是 D 中的点.

定义 6.2 如果对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PA| < \delta(\varepsilon), \quad \text{就有 } |f(P) - f(A)| < \varepsilon \text{成立}, \tag{6.2}$$

那么称函数 $f(P)$ 在点 A 处连续.

因为 $|PA| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 所以定义 6.2 若用坐标来描述, 则成为: 对于任意正实数 ϵ, 存在正实数 $\delta(\epsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |x-a| < \delta(\epsilon), |y-b| < \delta(\epsilon), \text{ 就有 } |f(x,y)-f(a,b)| < \epsilon \text{成立}, \tag{6.3}$$

那么称函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处连续.

上述定义 6.2 中, 因为 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是任意点集, 所以也存在 A 是 D 的孤立点的情况, 这时若取正实数 δ 非常小, 只要 $|PA| < \delta$, $P \in D$, 就有 $P = A$, 从而得到以 D 为定义域的函数都在点 A 处连续这样平凡的结论. 若将这种情况排除, 则 A 是 D 的聚点, 并且函数 $f(P)$ 在点 A 处连续蕴含

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

函数 $f(x,y)$ 在定义域 D 内所有的点处都连续时, 称 $f(x,y)$ 是**连续函数**, 或者称为两个变量 x, y 的二元连续函数. 此时称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 或者在 D 上关于变量 x, y 连续.

若以某领域 D 为定义域的函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则根据 (6.3) 式, 显然有: 将 y 固定时, $f(x,y)$ 关于 x 连续; 将 x 固定时, $f(x,y)$ 关于 y 连续, 反之未必成立. 即尽管 $f(x,y)$ 在 y 固定时关于 x 连续; 在 x 固定时关于 y 连续, 但是 $f(x,y)$ 未必在 D 上连续.

例 6.2 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 令 $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$, 并且令 $f(0,0) = 0$, 则得到以 $\mathbf{R}^2$ 为定义域的函数 $f(x,y)$. 显然, 若 y 固定, 则 $f(x,y)$ 关于 x 连续; 若 x 固定, 则 $f(x,y)$ 关于 y 连续. 当 $x \neq 0$ 时, $f(x,x) = 1$, 所以作为两个变量 x, y 的二元函数 $f(x,y)$ 在原点 $O = (0,0)$ 处不连续.

若 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的连续函数, 则它们的线性组合 $c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y)$, c_1, c_2 是常数, 以及乘积 $f(x,y)g(x,y)$ 也是定义在 D 上的连续函数. 进而, 若在 D 上 $g(x,y) \neq 0$, 商 $f(x,y)/g(x,y)$ 也是定义在 D 上的连续函数. 根据函数极限的运算法则这是显然的.

x 和 y 都是定义在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的两个变量 x, y 的二元连续函数. 所以, 由上述结果, x 和 y 的多项式:

$$f(x,y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{hk} x^h y^k, \quad a_{hk} \text{ 为常数},$$

是两个变量 x 和 y 的二元连续函数. 有理式 $f(x,y)/g(x,y)$ [其中 $f(x,y), g(x,y)$ 是多项式] 除去满足 $g(x,y) = 0$ 的点 (x,y) 外在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

d) 复合函数

设 $f(P) = f(x,y), g(P) = g(x,y) (P = (x,y))$ 是定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的连续函数, $\varphi(u,v)$ 是定义在 $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ 上关于 u, v 的连续函数, 并且设对于所有的 $P \in D$,

$(f(P), g(P)) \in \Delta$. 那么, **复合函数** $\varphi(f(x,y), g(x,y))$ **在** D **上关于** x, y **连续**. [证明] 证明是简单的. 任取点 $A \in D$, 若 $\alpha = f(A), \beta = g(A)$, 则 $(\alpha, \beta) \in \Delta$. 因为 f, g, φ 是连续函数, 所以对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta_1(\varepsilon)$ 和 $\delta_2(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PA| < \delta_1(\varepsilon), \quad \text{就有 } |f(P) - f(A)| < \varepsilon, \quad |g(P) - g(A)| < \varepsilon,$$

$$\text{只要 } |u - \alpha| < \delta_2(\varepsilon), \quad |v - \beta| < \delta_2(\varepsilon), \quad \text{就有 } |\varphi(u,v) - \varphi(\alpha,\beta)| < \varepsilon.$$

因此, 若令 $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\delta_2(\varepsilon))$, 则

$$\text{只要 } |PA| < \delta(\varepsilon), \text{就有 } |\varphi(f(P), g(P)) - \varphi(f(A), g(A))| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

即函数 $\varphi(f(x,y), g(x,y))$ 在点 A 处连续, 这里 A 是 D 中的任意点, 因此 $\varphi(f(x,y), g(x,y))$ 在 D 上连续. □

根据此结果和上述多项式的连续性, 若 $f(x,y), g(x,y)$ 在 D 上连续, 则

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{hk} f(x,y)^h g(x,y)^k, \quad a_{hk} \text{ 为常数,}$$

在 D 上也连续.

e) 连续函数的性质

在 2.2 节 b) 中证明过的关于一元连续函数的定理 2.3~ 定理 2.6 很容易扩展到二元连续函数上.

定义 6.3 设 $f(P) = f(x,y) (P = (x,y))$ 是定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的函数. 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |PQ| < \delta(\varepsilon), \quad P \in D, \quad Q \in D, \quad \text{就有} \quad |f(P) - f(Q)| < \varepsilon \text{ 成立,}$$

那么称 $f(x,y)$ 在 D 上**一致连续**.

定理 6.2 定义在有界闭集 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的连续函数在 D 上一致连续.

证明 关于闭区间上连续函数的一致连续性的定理 2.3 的证明仅以闭区间是紧致的为基础, 并且根据 1.6 节 e) 中定理 1.28, D 是紧致的, 所以仍然适用于定理 6.2 的证明, 但是此处我们以定理 1.30 为基础介绍另外的证明方法.

假设定义在有界闭集 D 上的连续函数 $f(P) = f(x,y), P = (x,y)$ 在 D 上不一致连续, 则对于某一个正实数 ε, 无论取什么样的正实数 δ,

$$\text{当 } |PQ| < \delta, \quad P \in D, \quad Q \in D \text{ 时,} \quad \text{不等式} \quad |f(P) - f(Q)| < \varepsilon \text{ 都不成立.}$$

因此, 对于每一个自然数 n, 都存在点 P_n, Q_n, 使得

$$\text{当 } |P_nQ_n| < \frac{1}{n}, \quad P_n \in D, \quad Q_n \in D \text{ 时,} \quad |f(P_n) - f(Q_n)| \geqslant \varepsilon \text{成立.} \tag{6.4}$$

因为点列 $\{P_n\}$ 有界, 所以根据定理 1.30, 此点列具有收敛的子列: $P_{n_1}, P_{n_2}, P_{n_3}, \cdots, P_{n_j}, \cdots, n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_j < \cdots$. 设该极限为 $A = \lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j}$, 因为 D 是闭集,

所以 $A \in D$, 并且

$$|P_{n_j}Q_{n_j}| < \frac{1}{n_j} \to 0 \quad (j \to \infty),$$

所以 $\lim\limits_{j\to\infty} Q_{n_j} = \lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j} = A$. 根据假设, $f(P)$ 在 D 上连续, 因此

$$\lim_{j\to\infty} f(Q_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(P_{n_j}) = f(A).$$

这与根据 (6.4) 式得出的 $|f(Q_{n_j}) - f(P_{n_j})| \geqslant \varepsilon$ 相矛盾. 所以, $f(x,y)$ 在 D 上一致连续. □

注 若 A 是 D 的孤立点, 对于某个自然数 j_0, 当 $j > j_0$ 时, $Q_{n_j} = P_{n_j} = A$, 这与 (6.4) 式相矛盾.

定理 6.3 定义在有界闭集 D 上的连续函数有最大值和最小值.

证明 证明和定理 2.4 的证明相同: 设 $f(P)$ 是定义在有界闭集 D 上的连续函数. 为了证明 $f(P)$ 有界, 即值域 $f(D)$ 有界, 如果我们假设 $f(D)$ 无界, 那么当 $n \to \infty$ 时, 存在 $|f(P_n)| \to +\infty$ 的点列 $\{P_n\}$, $P_n \in D$. 由定理 1.30, $\{P_n\}$ 具有收敛的子列: $P_{n_1}, P_{n_2}, \cdots, P_{n_j}, \cdots$, $A = \lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j} \in D$, 因为 $f(P)$ 连续, 所以 $\lim\limits_{j\to\infty} f(P_{n_j}) = f(A)$, 这与 $|f(P_n)| \to +\infty (n \to \infty)$ 相矛盾. 因此, $f(D)$ 有界. 于是若设 $f(D)$ 的上确界是 β, 则 β 是 $f(P)$ 的最大值. 这是因为, 如果 β 不是 $f(P)$ 的最大值, 因为恒有 $f(P) < \beta$, 所以 $1/(\beta - f(P))$ 也是定义在 D 上的连续函数, 从而有界, 即存在满足

$$\frac{1}{\beta - f(P)} < \gamma$$

的常数 γ. 因此 $f(P) < \beta - 1/\gamma$ 与 β 是 $f(D)$ 的上确界相矛盾.

同理, 若 $f(D)$ 的下确界是 α, 则 α 是 $f(P)$ 的最小值. □

定理 6.4 定义在领域 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 的值域 $f(D)$ 是一个区间.

证明 若 $\alpha \in f(D)$, $\beta \in f(D)$, $\alpha < \mu < \beta$, 则只须证明 $\mu \in f(D)$. 为此, 假设 $\mu \notin f(D)$, 并且令

$$V = \{P | P \in D, f(P) < \mu\},$$

则 V 是开集. 这是因为 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 所以若 $f(P) < \mu$, 则当 $|QP| < \varepsilon$ 时, 存在满足 $f(Q) < \mu$ 的正实数 ε, 这是因为 P 的邻域 $U_\varepsilon(P) \subset V$ 存在. 根据假设, 存在满足 $f(A) = \alpha < \mu$ 的点 $A \in D$, 所以 V 不是空集. 同理, 若

$$W = \{P | P \in D, f(P) > \mu\},$$

则 W 也不是空集, 并且显然有

$$D = V \cup W, \quad V \cap W = \varnothing.$$

这与 D 是连通的相矛盾, 因此 $\mu \in f(D)$. □

定理 6.5 定义在有界闭领域 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 的值域 $f(D)$ 是闭区间.

证明 根据假设, D 是某个领域 U 的闭包: $D=[U]$. 根据定理 6.3, $f(x,y)$ 有最小值 $\alpha=f(A)$, $A\in D$, 和最大值 $\beta=f(B)$, $B\in D$. 另一方面, 根据定理 6.4, $f(U)$ 是一个区间. 因为

$$f(U)\subset f(D)\subset[\alpha,\beta],\quad \alpha\in f(D),\beta\in f(D),$$

所以, 若要证明 $f(D)$ 和闭区间 $[\alpha,\beta]$ 一致, 只须证明 α 和 β 都包含在区间 $f(U)$ 的闭包 $[f(U)]$ 中即可. 因为 $A\in D=[U]$, 若 $A\notin U$, 则 A 是 U 的聚点. 从而存在收敛于 A 的点列 $\{P_n\}$,$P_n\in U$. 因为函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 所以 $\alpha=f(A)=\lim\limits_{n\to\infty}f(P_n)\in[f(U)]$. 若 $A\in U$, 则显然有 $\alpha\in[f(U)]$. 同理, $\beta\in[f(U)]$. □

实直线 $\mathbf{R}$ 上的领域就是开区间, 有界闭领域是闭区间, 所以上述定理 6.5 和定理 6.4 可以看作是由与单变量连续函数相关的定理 2.5 和定理 2.6 向二元函数的推广.

f) 函数的图像

一般地, 对于定义在点集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的函数 f, 由点 $P\in D$ 和 f 在点 P 处的值 $f(P)$ 的数对 $(P,f(P))$ 的全体组成的 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^3$ 的子集称为函数 f 的图像, 记为 G_f. 这同一元函数时相同. 用坐标表示为,

$$G_f=\{(x,y,z)|z=f(x,y),(x,y)\in D\}.$$

将三维空间 $\mathbf{R}^3$ 内的图像 G_f 在二维的纸上描绘并不容易, 但在脑海中想象 G_f 的形状同样可以把握函数 f 的性质. 例如, 例 6.2 的函数 $f(x,y)$ 对每个变量 x,y 都连续, 但作为两个变量 x,y 的二元函数在原点 O 处不连续, 这通过考虑 f 的图像 G_f 的形状, 便可以容易理解.

6.2 微分法则

a) 偏微分

设 $f(x,y)$ 是定义在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的某个领域 D 上的函数, (a,b) 是 D 上的某一点. 若 x 的函数 $f(x,b)$ 在 a 处关于 x 可微, 则称两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处关于 x **可偏微**(partially differentiable), 函数 $f(x,b)$ 在 a 处的微分系数用 $f_x(a,b)$ 表示:

$$f_x(a,b)=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}.\tag{6.5}$$

并且称 $f_x(a,b)$ 为 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处关于 x 的**偏微分系数**(partial differential coefficient). 因为 x 的函数 $f(x,b)$ 的定义域包含某个区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, 所

以能够考虑 (6.5) 式右边的极限. 遵循属于 D 的点的坐标与变量用同样的文字表示的习惯, 将 (6.5) 式中的 a,b 分别用 x,y, 右边的 x 用 $x+h$ 来替换, 则

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}. \tag{6.6}$$

令 $z=f(x,y)$ 时, $f_x(x,y)$ 用 $\partial z/\partial x$ 表示:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\quad z=f(x,y).$$

如果函数 $f(x,y)$ 在定义域 D 上的所有点 (x,y) 处关于 x 都可偏微, 则称函数 $f(x,y)$ 关于 x **可偏微**. 此时 $f_x(x,y)$ 也是定义在 D 上的两个变量 x,y 的二元函数. 该函数 $f_x(x,y)$ 称为 $f(x,y)$ 关于 x 的**偏导函数**(partial derivative), 把求 $f_x(x,y)$ 的过程称为对 $f(x,y)$ 关于 x **求偏微分**. $f(x,y)$ 关于 x 求偏微分就是固定 y, 把 $f(x,y)$ 看作是关于 x 的函数, 并对 x 微分. 函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导函数的表示方法有 $f_x(x,y)$, $\partial z/\partial x$ 或 $\partial f(x,y)/\partial x$, $(\partial/\partial x)f(x,y)$, $\mathrm{D}_x f(x,y)$ 等.

同理, 若点 (x,y) 处存在极限:

$$f_y(x,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}, \tag{6.7}$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处关于 y 可偏微, 称函数 $f_y(x,y)$ 为关于 y 的偏微分系数. 如果函数 $f(x,y)$ 在属于 D 的所有点处关于 y 都可偏微, 则称函数 $f(x,y)$ 关于 y 可偏微, 称函数 $f_y(x,y)$ 为 $f(x,y)$ 关于 y 的偏导函数. 若 $z=f(x,y)$, 则类似地 $f_y(x,y)$ 可用 $\partial z/\partial y$ 等表示.

若 $z=f(x,y)$ 关于 x 可偏微, 并且偏导函数 $\partial z/\partial x=f_x(x,y)$ 关于 x 或 y 可偏微, 则 $f_x(x,y)$ 关于 x 或 y 求偏微分, 可得二阶偏导函数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

同理可得三阶以上的偏导函数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=f_{xyx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)=\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=f_{xxxx}(x,y).$$

例 6.3 6.1 节例 6.2 的函数 $f(x,y)$, 当 $y=0$ 时, $f(x,0)=0$; 当 $y\neq 0$ 时, $f(x,y)=2xy/(x^2+y^2)$, 所以此函数关于 x 可偏微, 并且

$$f_x(x,0)=0,\ 当\ y\neq 0\ 时,\quad f_x(x,y)=\frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

同理, $f(x,y)$ 关于 y 可偏微. 但是 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续.

如例 6.3 所示, 定义在领域 D 上的函数 $f(x,y)$ 即使关于 x 及 y 都可偏微, 但作为两个变量 x,y 的二元函数也未必连续. 这是因为, 可偏微性是指变量 x,y 中"固定一个而变动另一个" 时 $f(x,y)$ 的性质. 连续性是 x,y"同时变动" 时 $f(x,y)$ 的性质, 因此从可偏微性得不出连续性是理所当然的. 这与 $f(x,y)$ 关于 x,y 的可偏微性是不一样的, 所以应当定义作为两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 的可微分性.

b) 可微性和全微分

与 3.1 节中所述的一元函数相同, 把满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\alpha(0,0)=0$ 的函数 $\alpha(x,y)$ 称为无穷小. 当 $\varepsilon(x,y)$ 和 $\alpha(x,y)$ 是无穷小时, 无穷小 $\varepsilon(x,y)\alpha(x,y)$ 用符号 $o(\alpha(x,y))$ 表示. 例如:

$$o(\sqrt{x^2+y^2})=\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\varepsilon(x,y)=\varepsilon(0,0)=0,$$

当一元函数 $f(x)$ 在 a 处可微时, (3.6) 式, 即

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)$$

成立. 我们将它推广到二元函数的可微性:

定义 6.4 设 $f(x,y)$ 是定义在某领域 D 上两个变量 x,y 的二元函数, (a,b) 是 D 上一点. 如果存在常数 A, B, 使得

$$f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})\tag{6.8}$$

成立, 那么就称函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微.

设 $f(x,y)$ 是定义在领域 D 上的函数, (a,b) 是属于 D 的点. 根据 (6.8) 式,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b).$$

所以, 若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 (a,b) 上连续. 若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 (a,b) 处关于 x,y 可偏微, (6.8) 式右边的常数 A, B 分别和偏微分系数 $f_x(a,b), f_y(a,b)$ 相等. 事实上, 这是因为, (6.8) 式中如果设 $y=b$, 则

$$f(x,b)=f(a,b)+A(x-a)+o(x-a),$$

所以

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=A,$$

同理

$$\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}=B.$$

因此, 若 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微, 则

$$f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}).$$

若将 a, b 用 x, y; x, y 用 $x+h, y+k$ 来替换, 则上式可改写为

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+f_x(x,y)h+f_y(x,y)k+o(\sqrt{h^2+k^2}).\qquad(6.9)$$

即当函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微时, (6.9) 式成立. 此时, 若函数 $f(x,y)$ 用 $z=f(x,y)$ 表示, 并且令 $\Delta x=h$, $\Delta y=k$, $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$, 则

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),\qquad(6.10)$$

称 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 分别是 x, y, z 的增量, 这与一元函数的情况相同. (3.8) 式中单变量 x 的函数 $y=f(x)$ 的微分定义为

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x.$$

由此, 两个变量 x,y 的二元函数 $z=f(x,y)$ 的**全微分**(total differential) 定义为

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x,y)=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\qquad(6.11)$$

或者

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.\qquad(6.12)$$

全微分 $\mathrm{d}z$ 是增量 Δz 的 "主部". 不称为 "微分" 而称为 "全微分" 是为了与 "偏微分" 相区别. 若考虑两个变量 x,y 的二元函数, 因为 $\partial x/\partial x=1, \partial x/\partial y=0$, 则全微分为 $\mathrm{d}x=\Delta x$, 同理 $\mathrm{d}y=\Delta y$. 因此 (6.11) 式和 (6.12) 式可以改写成

$$\mathrm{d}f(x,y)=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y,\qquad(6.13)$$

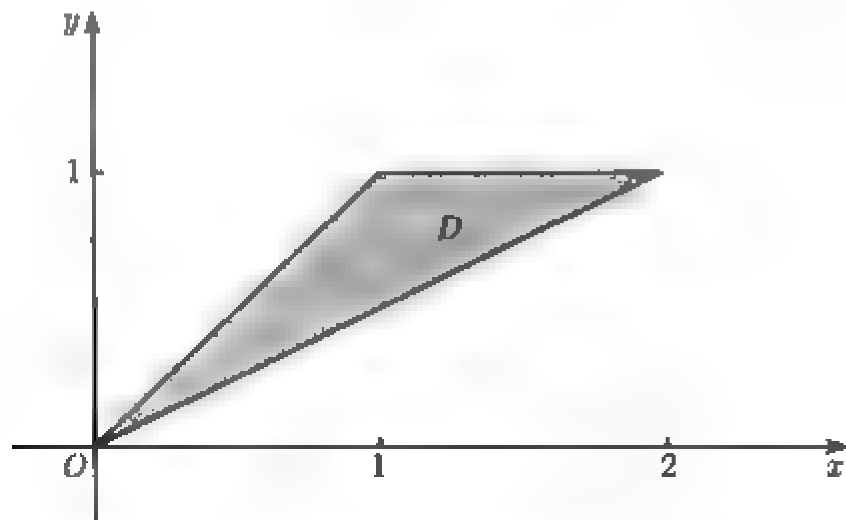
$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.\qquad(6.14)$$

当 $f(x,y)$ 在其定义域 D 上的所有点 (x,y) 处都可微时, 称函数 $f(x,y)$ 可微, 或者称关于两个变量 x,y 可微, 并且称 $f(x,y)$ 是可微函数. **可微函数 $f(x,y)$ 是连续函数, 并且关于 x 和 y 都可偏微.**

一般地, 当给定函数 $f(x,y)$ 的定义域的子集 D 时, 将函数 $f(x,y)$ 的定义域缩小到 D 而获得的函数称为函数 $f(x,y)$ 在 D 上的限制, 并且用符号 $f_D(x,y)$ 或者 $(f|D)(x,y)$ 表示. $f_D(x,y)$ 是定义在 D 上的函数, 并且当 $(x,y)\in D$ 时, $f_D(x,y)=f(x,y)$. 当 D 是领域时, 若 $f_D(x,y)$ 是连续函数, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 若 $f_D(x,y)$ 是可微函数时, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上可微. 进一步, 对于与函数相关的某性质 $\mathcal{A}$, 当 $f_D(x,y)$ 是 $\mathcal{A}$ 时, 称 $f(x,y)$ 在 D 上是 $\mathcal{A}$ 的. 例如, 若函数 $f_D(x,y)$ 关于 x 可偏微, 则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x 是可偏微的. 根据假设, D 是领域, 所以函数 $f(x,y)$ 若在 D 上连续可微, 关于 x 或 y 可偏微, 则 $f(x,y)$ 在 D 上的所有的点 (x,y) 处都连续可微, 关于 x 或 y 可偏微. 若 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x 可偏微, 则称该函数在 D 上存在偏导函数 $f_x(x,y)$.

类似地, 当函数 $f(x,y)$ 的定义域的子集D 是闭区间时, 若 $f_D(x,y)$ 是 $\mathcal{A}$ 时, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上是 $\mathcal{A}$ 的. 但是, 此时即使$f(x,y)$ 在 D 上连续, $f(x,y)$ 也未必在属于 D 的所有的点处都连续. 例如, 在 $\mathbf{R}^2$ 上若定义函数 $f(x,y)$ 为: 当 $x^2+y^2\leqslant 1$ 时, $f(x,y)=x^2+y^2$; 当 $x^2+y^2>1$ 时, $f(x,y)=0$, 则函数 $f(x,y)$ 在闭区间 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上连续, 但 $f(x,y)$ 在 D 的边界点 $(x,y)\in\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 上不连续.

我们虽然讨论了定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一元函数 $f(x)$ 的边界点 a 或者 b 处的函数 $f(x)$ 的微分系数 $f'(a), f'(b)$, 但是, 对于定义在闭领域 $D=[U](U$ 为领域) 上的二元函数 $f(x,y)$, 我们通常不能考虑在 D 的边界点 (a,b) 上的偏微分系数. 一般地, 在闭领域边界处比较复杂, 因为, 当 (a,b) 是 D 的边界点时, 例如, 由于 $f(x,b)$ 的定义域 $\{x|(x,b)\in D\}$ 有可能是不包含任何含有 a 的区间的集合, 此时, $f(x,b)$ 在 $x=a$ 处的微分系数不能定义. 例如, 若 D 是单位圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 时, 则函数 $f(x,1)$ 的定义域是仅由一个点组成的集合$\{0\}$, 并且当 $D=\{(x,y)|y\leqslant x\leqslant 2y, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 时, $f(x,0)$ 和 $f(0,y)$ 都是定义在仅由一个点组成的集合上的函数.



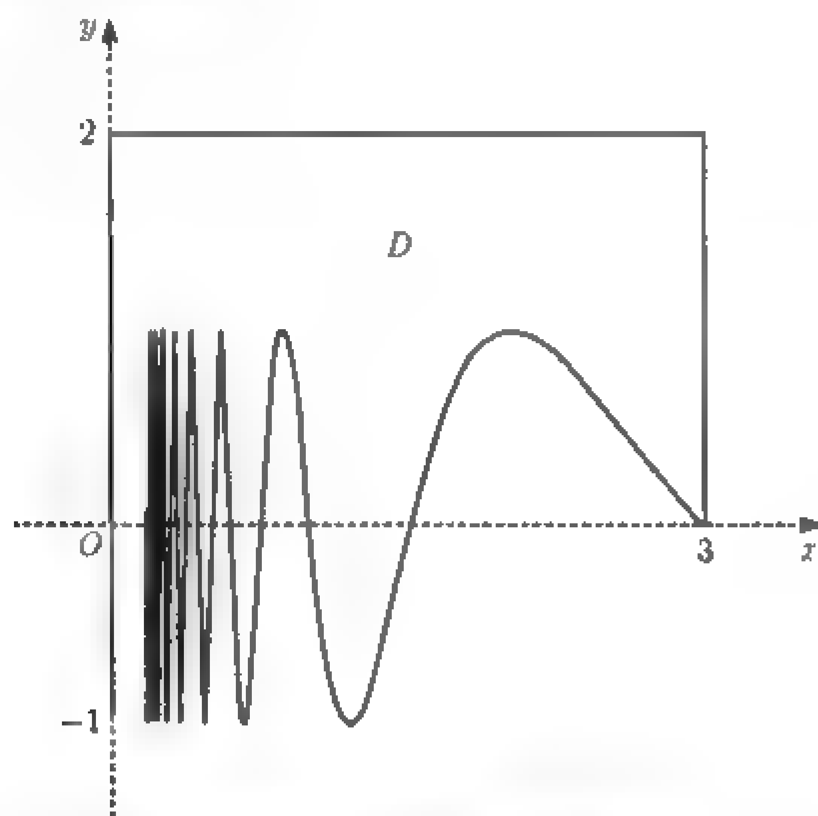
例 6.4 若我们考虑具有比较复杂边界的闭领域:

$$D = [U], \quad U = \{(x, y) | -\sin\frac{3\pi}{x} < y < 2, 0 < x < 3\}.$$

则 D 的边界是关于 x 的函数 $y = -\sin(3\pi/x)$, $0 < x < 3$ 的图像 G 和 3 个线段的并集:

$$G \cup \{(0, y) | -1 \leqslant y \leqslant 2\} \cup \{(x, 2) | 0 \leqslant x \leqslant 3\} \cup \{(3, y), 0 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

例如, 原点 $(0,0)$ 是 D 的边界点, $\{(x,0)|(x,0) \in D\}$ 是在 x 轴上相互没有交点的无数个闭区间 $[3/3, 3/2]$, $[3/5, 3/4]$, $[3/7, 3/6]$, $\cdots$ 与由两点组成的集合$\{3, 0\}$的并集, 并且不含有任何包含 0 的区间.



如上所述, $f(x,y)$ 的定义域的子集 D 是闭领域时, 由于一般不能考虑在 D 的边界点处 $f_D(x,y)$ 的偏微分系数, 所以我们不称函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x 可偏微等. 但是, D 是如 $D = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 的闭矩形的情况例外. 例如, 对于满足 $c \leqslant y \leqslant d$ 的 x 的函数 $f(x,y)$, 若它在闭区间 $[a,b]$ 上可微, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x 可偏微, 或者称它在 D 上存在偏导函数 $f_x(x,y)$.

定理 6.6 若函数 $f(x,y)$ 的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在领域 D 上存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上可微.

证明 只须证明在 D 的任意点 (x,y) 处,

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) \tag{6.15}$$

成立即可. 因为

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y+k) - f(x,y)$$

又 $f(x+h,y+k)$ 是 h 的可微函数, 所以根据中值定理 (定理 3.5),

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=f_x(x+\theta h,y+k)h,\quad 0<\theta<1.$$

根据已知条件, $f_x(x,y)$ 在 D 上连续, 所以

$$f_x(x+\theta h,y+k)=f_x(x,y)+\varepsilon(h,k),\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\varepsilon(0,0)=0,$$

从而, 若令 $o(h)=\varepsilon(h,k)h$, 则

$$f(x+h,y+k)-f(x,y+k)=f_x(x,y)h+o(h).$$

又因为 $f(x,y+k)$ 关于 k 可微, 所以,

$$f(x,y+k)-f(x,y)=f_y(x,y)k+o(k).$$

因此

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f_x(x,y)h+f_y(x,y)k+o(h)+o(k),$$

即 (6.15) 式成立. 显然 $o(h)+o(k)$ 可表示为 $o(\sqrt{h^2+k^2})$. □

如果在领域 D 上 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 都存在但不连续, 那么 $f(x,y)$ 也未必在 D 上可微. 例如, 设 $f(x,y)$ 是例 6.2 中引入的函数, 则在 $\mathbf{R}^2$ 上 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 存在, 但是在原点 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 不连续, 从而不可微. 此时, 若 $y\neq 0$, 则

$$f_x(x,y)=\frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此, $f_x(0,y)=2/y$, 并且 $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续.

在领域 D 上 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 存在且连续时, 称 $f(x,y)$ 在 D 上**连续可微**或者在 D 上**光滑**. 根据定理 6.6, D 上连续可微的函数在 D 上可微, 因而也连续.

例 6.5 在 3.3 节例 3.5 中, 已经证明了: 当 $f(0)=0$, $x\neq 0$ 时, 关于 x 的函数 $f(x)=x^2\sin(1/x)$ 在实直线上的每一点 x 处可微, 并且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续. 同理, 若函数 $f(x,y)$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } (x,y)=(0,0) \text{ 时},\\ (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{当 } (x,y)\neq(0,0) \text{ 时},\end{cases}$$

则 $f(x,y)$ 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上每一点处都可微, 但是偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续.

[证明] 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 关于 x 或者 y 可偏微, 并且

$$f_x(x,y)=2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$f_y(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

显然 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处都连续. 所以根据定理 6.6, 函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处都可微. 在原点 $(0,0)$ 处, 因为 $f(0,0)=0$, 并且 $|f(h,k)|\leqslant h^2+k^2$, 所以

$$f(h,k) = f(0,0) + o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

即 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微. 但是, 若令 $y=0$, 则当 $x\neq 0$ 时,

$$f_x(x,0) = 2x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) \pm \cos\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ 不存在. 从而 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 同理, $f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处也不连续.

c) **偏微分的顺序**

定理 6.7 如果函数 $f(x,y)$ 在领域 D 上存在偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$, 并且 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 连续, 那么有

$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y). \tag{6.16}$$

证明 设 (a,b) 是 D 上的任意一点, 并且

$$\Delta(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b).$$

若令

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b),$$

根据已知条件知 $f_x(x,y)$ 存在, 所以 $\varphi(x)$ 是关于 x 的可微函数. 因此, 根据中值定理 (定理 3.5),

$$\Delta(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a) = \varphi'(a+\theta h)h, \quad 0<\theta<1,$$

又因为 $\varphi'(a+\theta h) = f_x(a+\theta h, b+k) - f_x(a+\theta h, b)$, 并且根据已知条件, $f_{xy}(x,y)$ 存在且连续, 所以

$$\begin{aligned}
&\varphi'(a+\theta h) = f_{xy}(a+\theta h, b+\eta k)k, \qquad 0<\eta<1\\
&f_{xy}(a+\theta h, b+\eta k) = f_{xy}(a,b) + \varepsilon(h,k),\\
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \varepsilon(0,0) = 0.
\end{aligned}$$

从而

$$\Delta(h,k) = (f_{xy}(a,b) + \varepsilon(h,k))hk. \tag{6.17}$$

因此, 若令 $k=h$, 则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,h)}{h^2}=f_{xy}(a,b).$$

若令

$$\Delta(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)$$

并且将 x 和 y 交换代入, 同理可证,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,h)}{h^2}=f_{yx}(a,b).$$

所以 $f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$, 又因为 (a,b) 是 D 上的任意一点, 故等式 (6.16) 式成立. □

定理 6.8 (Young 定理) 如果在领域 D 上 $f(x,y)$ 的偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 存在并且可微, 那么等式 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ 成立.

证明 在定理 6.7 的证明中得到的等式

$$\Delta(h,k)=(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b))h,\quad 0<\theta<1,$$

在此仍然成立. 根据已知条件,

$$f_x(a+h,b+k)=f_x(a,b)+f_{xx}(a,b)h+f_{xy}(a,b)k+o(\sqrt{h^2+k^2}),$$

所以

$$f_x(a+\theta h,b+k)=f_x(a,b)+f_{xx}(a,b)\theta h+f_{xy}(a,b)k+o(\sqrt{h^2+k^2}),$$
$$f_x(a+\theta h,b)=f_x(a,b)+f_{xx}(a,b)\theta h+o(h),$$

所以

$$\Delta(h,k)=f_{xy}(a,b)kh+h\ o(\sqrt{h^2+k^2}).$$

此时, 若令 $k=h$, 则

$$\Delta(h,h)=f_{xy}(a,b)h^2+o(h^2).$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,h)}{h^2}=f_{xy}(a,b),$$

同理

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h,h)}{h^2}=f_{yx}(a,b).$$

故

$$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b).$$ □

我们虽然在定理 6.7 中假设了 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 都存在且连续, 但实际上只要假设其中之一存在且连续即可.

定理 6.9 (Schwarz 定理) 如果函数 $f(x,y)$ 在领域 D 上的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y)$ 存在, 并且 $f_{xy}(x,y)$ 连续, 则偏导函数 $f_{yx}(x,y)$ 也存在, 并且与 $f_{xy}(x,y)$ 相等, 即 $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

证明 设 (a,b) 是 D 上任意一点, 并且

$$\Delta(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b),$$

则根据 (6.17) 式,

$$\Delta(h,k) = (f_{xy}(a,b) + \varepsilon(h,k))hk.$$

根据已知条件, $f_y(x,y)$ 存在, 所以, 当 $h \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}(f_{xy}(a,b)+\varepsilon(h,k))h &= \lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k} - \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\\ &= f_y(a+h,b) - f_y(a,b).\end{aligned}$$

因此, 极限 $\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(h,k)$ 存在, 使得

$$\frac{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)}{h} = f_{xy}(a,b) + \lim_{k\to 0}\varepsilon(h,k).$$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) = 0$ 蕴含: 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 只要 $0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta(\varepsilon)$, 就有 $|\varepsilon(h,k)| < \varepsilon$ 成立. 所以,

$$\text{若 } 0 < |h| < \delta(\varepsilon), \quad \text{则 } \left|\lim_{k\to 0}\varepsilon(h,k)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\varepsilon(h,k) = 0$ 成立. 因此,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_y(a+h,b) - f_y(a,b)}{h} = f_{xy}(a,b),$$

即 $f_y(x,y)$ 在点 (a,b) 处关于 x 可偏微, 并且偏微分系数为

$$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b).$$

□

等式 $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ 在无条件限制下不成立.

例 6.6 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上定义函数 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } (x,y)=(0,0) \text{ 时},\\ xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{当 } (x,y)\neq(0,0) \text{ 时}.\end{cases}$$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f(x,y)$ 关于 x 可偏微

$$f_x(x,y)=y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

函数 $f_x(x,y)$ 显然连续, 并且因为 $|f_x(x,y)|\leqslant 2|y|$, 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=0$. 又因为 $f(x,0)=0$, 所以 $f_x(0,0)=0$. 因此函数 $f_x(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续. 同理, $f(x,y)$ 关于 y 可偏微, 并且 $f_y(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$f_y(x,y)=x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此, 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

在原点 $(0,0)$ 处, 因为

$$f_x(0,y)=-y,\qquad f_y(x,0)=x,$$

所以

$$f_{xy}(0,0)=-1,\qquad f_{yx}(0,0)=1,$$

并且等式 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$不成立. 因此, 根据定理 6.9, $f_{xy}(x,y)$ 不应是连续函数. 事实上, 当 $x\neq 0$ 时, $f_{xy}(x,0)=1$, $f_{xy}(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续. 此外, 根据定理 6.8, $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 均要可微, 事实上, $f_x(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不可微. 这是因为, $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_x(x,0)=0$, 所以 $f_{xx}(0,0)=0$, 因此

$$f_x(h,k)-f_x(0,0)-f_{xx}(0,0)h-f_{xy}(0,0)k=k\frac{h^4-k^4+4h^2k^2}{(h^2+k^2)^2}+k=k\frac{2h^4+6h^2k^2}{(h^2+k^2)^2}$$

不等于 $o(\sqrt{h^2+k^2})$.

如果函数 $f(x,y)$ 在某领域上的偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y), f_{xy}(x,y)$ 存在且连续, 那么根据定理 6.9, 偏导函数 $f_{yx}(x,y)$ 也存在且连续. 但是, 此时 $f_{xx}(x,y), f_{yy}(x,y)$ 未必存在.

例 6.7 例 3.4 的函数 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}|\sin(\pi n!t)|$ 虽然在实直线上连续, 但是在各有理点处不可微. 所以, 若令

$$f(x,y)=\psi(x)\psi(y),\quad \psi(u)=\int_0^u\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

则 $f_x(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, $f_y(x,y)=\psi(x)\varphi(y)$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)$ 皆连续. 因为 $\varphi(x)$ 在有理点上不可微, 并且当 $y\neq 0$ 时, $\psi(y)\neq 0$. 所以当 a 为有理数, 并且 $b\neq 0$ 时, 在点 (a,b) 处不存在偏微分系数 $f_{xx}(a,b)$.

d) 函数的类

设 $f(x,y)$ 是定义在领域D 上的两个变量 x,y 的二元函数. 如果 $f(x,y)$ 连续可微, 并且其偏导函数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 也连续可微, 那么就称 $f(x,y)$ 是二阶连续可微函数. 如果 $f(x,y)$ 是二阶连续可微函数, 并且其二阶偏导函数 $f_{xx}(x,y),f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y),f_{yy}(x,y)$ 皆连续可微, 那么 $f(x,y)$ 是三阶连续可微函数. 一般地, 如果 $f(x,y)$ 是 $n-1$ 阶连续可微函数, 并且其 $n-1$ 阶偏导函数皆连续可微, 那么就称 $f(x,y)$ 是 n 阶连续可微函数. 函数 $f(x,y)$ 是 n 阶连续可微是指函数 $f(x,y)$ 的直至第 n 阶偏导函数都存在且连续. 称 n 阶连续可微函数为 $\mathscr{C}^n$ 类函数.

同理, 如果 $f(x,y)$ 是可微函数, 并且其偏导函数 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 皆可微, 那么称 $f(x,y)$ 是二阶可微函数, 等等. 一般地, 如果 $f(x,y)$ 是 $n-1$ 阶可微函数, 并且其 $n-1$ 阶偏导函数皆可微, 那么就称 $f(x,y)$ 是 n 阶可微函数. 因为可微函数是连续的, 所以 n 阶可微函数是 $n-1$ 阶连续可微的, 并且它与 n 阶连续可微函数的差异仅在于 n 阶偏导函数未必都连续. 如我们在 3.4 节 f) 中对一元函数叙述的那样, 现代数学中比起 n 阶可微函数, n 阶连续可微函数的应用更为普遍. 既然已经假设存在直至 n 阶的偏导函数, 那么顺便附加其连续性假设就很自然了.

如果 $f(x,y)$ 是任意阶连续可微函数, 那么就称函数 $f(x,y)$ 为无穷阶可微, 称 $f(x,y)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 或者 $\mathscr{C}^\infty$ 函数. 因为任意阶可微函数是任意阶连续可微的, 所以称无穷阶可微与称无穷阶连续可微是一致的.

以上是把领域 D 作为了 $f(x,y)$ 的定义域, 当领域 D 是 $f(x,y)$ 的定义域的子集时, 若 $f(x,y)$ 在 D 上的限制 $f_D(x,y)$ 是 n 阶可微、n 阶连续可微、$\mathscr{C}^\infty$ 类函数等时, 亦称 $f(x,y)$ 在 D 上 n 阶可微、在 D 上 n 阶连续可微、在 D 上是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数等.

如果定义在某领域上的两个变量 x,y 的二元函数 $z=f(x,y)$ 是二阶连续可微或者二阶可微, 那么根据定理 6.7 或者定理 6.8, $f_{yx}(x,y)=f_{xy}(x,y)$, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

因此, $z=f(x,y)$ 的二阶偏导函数为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

如果 $z=f(x,y)$ 是三阶连续可微, 或者三阶可微, 那么

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y},$$

所以, $z=f(x,y)$ 的三阶偏导函数为

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

一般地, 如果 $z=f(x,y)$ 是 n 阶连续可微或者 n 阶可微, 那么其 n 阶以下的偏导函数在交换 $\dfrac{\partial}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 的顺序时都不改变, 所以都可写成:

$$\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q},\quad p+q\leqslant n.$$

e) 复合函数

设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的领域, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是定义在区间 I 上的函数, 并且 $t\in I$ 时, 恒有 $(\varphi(t),\psi(t))\in D$. 当两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 将 D 作为其定义域的子集时, 复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 是定义在 I 上的关于 t 的函数. 此时, **若 $\varphi(t),\psi(t)$ 连续, 并且 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 连续.** [证明] 任取点 $\alpha\in I$, 并且令 $a=\varphi(\alpha), b=\psi(\alpha)$, 则 $(a,b)\in D$, 所以根据假设, 对于任意给定的正实数 ε, 存在正实数 $\delta_1(\varepsilon)$, 使得

只要 $|x-a|<\delta_1(\varepsilon)$, $|y-b|<\delta_1(\varepsilon)$, 就有 $|f(x,y)-f(a,b)|<\varepsilon$ 成立.

又因为, 对于 ε, 存在对应的正实数 $\delta_2(\varepsilon)$, 使得

只要 $|t-\alpha|<\delta_2(\varepsilon)$, 就有 $|\varphi(t)-\varphi(\alpha)|<\varepsilon$, $\quad|\psi(t)-\psi(\alpha)|<\varepsilon$ 成立.

因此, 若令 $\delta(\varepsilon)=\delta_2(\delta_1(\varepsilon))$, 则

当 $|t-\alpha|<\delta(\varepsilon)$ 时, $\quad$ 有 $|f(\varphi(t),\psi(t))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))|<\varepsilon$.

即 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 在 I 的任意点 α 处连续. □

定理 6.10 如果函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 关于 t 可微, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于两个变量 x,y 可微, 那么复合函数 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 关于 t 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\varphi(t),\psi(t))=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t).\tag{6.18}$$

证明 设 $x=\varphi(t),y=\psi(t),z=f(x,y)=f(\varphi(t),\psi(t))$, 并且对应于 t 的增量 Δt 的 x, y, z 的增量分别设为 $\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$, $\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$, $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$, 则根据 (3.4) 式,

$$\Delta x=\varphi'(t)\Delta t+o(\Delta t),\quad \Delta y=\psi'(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

所以, 根据 (6.10) 式,

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}) \\ &= (f_x(x,y)\varphi'(t) + f_y(x,y)\psi'(t))\Delta t + o(\Delta t).\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x(x,y)\varphi'(t) + f_y(x,y)\psi'(t),$$

即 $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ 关于 t 可微, 并且 (6.18) 式成立. □

推论 如果函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 关于 t 连续可微, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x,y 连续可微, 那么 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 是连续可微的函数.

证明 根据假设, $\varphi'(t),\psi'(t)$ 在 I 上连续, $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在 D 上连续, 所以根据 (6.18) 式, $\mathrm{d}f(\varphi(t),\psi(t))/\mathrm{d}t$ 在 I 上连续. □

设 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=f(x,y)$, 并且若将 (6.18) 式改写成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{6.19}$$

则更易观察. 若采用微分符号, 则

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\varphi'(t)\mathrm{d}t + f_y(x,y)\psi'(t)\mathrm{d}t. \tag{6.20}$$

定理 6.11 设函数 $\varphi(t),\psi(t)$ 关于 t 是 n 阶连续可微的, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x, y 是 n 阶连续可微, 那么 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 是 n 阶连续可微函数.

证明 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 在上一个定理的推论中已经证明. 假设当 $n=m-1, m\geqslant 2$ 时, 定理 6.11 的结论成立, 现考察当 $n=m$ 时的情况. 根据定理 6.10, $f(\varphi(t),\psi(t))$ 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t).$$

因为 $f(x,y)$ 是 m 阶连续可微的, 所以 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 是 $m-1$ 阶连续可微的, 因此根据归纳假设, $f_x(\varphi(t),\psi(t)),f_y(\varphi(t),\psi(t))$ 关于 t 是 $m-1$ 阶连续可微的. 又因为 $\varphi'(t),\psi'(t)$ 是 $m-1$ 阶连续可微的, 所以根据定理 3.18 的 (1), $\mathrm{d}f(\varphi(t),\psi(t))/\mathrm{d}t$ 关于 t 是 $m-1$ 阶连续可微的, 因此 $f(\varphi(t),\psi(t))$ 是 m 阶连续可微函数. □

令 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=f(x,y)$, 则根据 (6.19) 式,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}.\end{aligned}$$

一般地, 根据关于 n 的归纳法, 容易验证

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}=\sum_{p+q\leqslant n}\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}\Phi_{pq}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right),$$

其中 $\Phi_{pq}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}\right)$ 是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\cdots,\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}$ 的多项式.

其次, 设 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 是定义在领域 E 上的两个变量 s,t 的二元函数, $(s,t)\in E$ 时, 若恒有 $(\varphi(s,t),\psi(s,t))\in D$, 并且在两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 的定义域包含领域 D 的假设条件下, 考虑复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$. 那么, 若 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 连续, 并且 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 连续.

定理 6.12 如果函数 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 关于 s,t 连续可微, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 x,y 连续可微, 那么复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 s,t 连续可微.

证明 根据定理 6.10, $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 s 和 t 都可偏微, 若简记为 $\varphi=\varphi(s,t),\psi=\psi(s,t)$, 则根据 (6.18) 式,

$$\frac{\partial}{\partial s}f(\varphi,\psi)=f_x(\varphi,\psi)\varphi_s(s,t)+f_y(\varphi,\psi)\psi_s(s,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\varphi,\psi)=f_x(\varphi,\psi)\varphi_t(s,t)+f_y(\varphi,\psi)\psi_t(s,t).$$

根据假设, $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 是两个变量 x,y 的连续函数, 所以 $f_x(\varphi(s,t),\psi(s,t))$, $f_y(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 是两个变量 s,t 的连续函数, 又 $\varphi_s(s,t),\psi_s(s,t),\varphi_t(s,t),\psi_t(s,t)$ 也是 s,t 的连续函数. 因此 $\partial f(\varphi,\psi)/\partial s,\partial f(\varphi,\psi)/\partial t$ 关于两个变量 x、y 连续, 即 $f(\varphi,\psi)=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 是连续可微函数. □

定理 6.13 如果函数 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 关于两个变量 s,t 可微, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于两个变量 x,y 可微, 那么复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 s,t 可微.

证明 设 $x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t),z=f(x,y)$, 并且设对应于 s,t 的增量 $\Delta s,\Delta t$ 的 x,y,z 的增量分别为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$, 则根据 (6.10) 式,

$$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial x}{\partial t}\Delta t+o(\sqrt{(\Delta s)^2+(\Delta t)^2}),\tag{6.21}$$

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial s}\Delta s+\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t+o(\sqrt{(\Delta s)^2+(\Delta t)^2}),\tag{6.22}$$

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.\tag{6.23}$$

因此, 将 (6.21) 式和 (6.22) 式代入 (6.23) 式的右边得

$$\Delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Delta t+o(\sqrt{(\Delta s)^2+(\Delta t)^2}).$$

即 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 是关于变量 $s,\ t$ 的可微函数. □

如果 $x=\varphi(s,t), y=\psi(s,t)$ 是两个变量 $s,\ t$ 的可微函数, 并且 $z=f(x,y)$ 是两个变量 $x,\ y$ 的可微函数, 那么根据上述证明,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}. \end{cases} \tag{6.24}$$

另外, 对每个变量 $x,\ y$, 若利用 (6.19) 式也可以得到 (6.24) 式.

定理 6.14 如果函数 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 关于 s,t 是 n 阶连续可微的, 并且函数 $f(x,y)$ 在 D 上关于 $x,\ y$ 是 n 阶连续可微的, 那么复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 s,t 是 n 阶连续可微的.

证明 利用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 此定理可归结于定理 6.12. 当 $n=m-1$, $m\geqslant 2$ 时, 假设定理 6.14 成立. 现考察 $n=m$ 时的情况. 令

$$F(s,t)=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$$

因为关于 $s,\ t$ 的函数 $F(s,t)$ 的 m 阶偏导函数是一阶偏导函数 $F_s(s,t)$ 或 $F_t(s,t)$ 的 $m-1$ 阶偏导函数, 所以为了证明 $F(s,t)$ 是 m 阶连续可微的, 先证明 $F_s(s,t)$ 及 $F_t(s,t)$ 是 $m-1$ 阶连续可微的即可.

根据 (6.18) 式,

$$F_s(s,t)=f_x(\varphi(s,t),\psi(s,t))\varphi_s(s,t)+f_y(\varphi(s,t),\psi(s,t))\psi_s(s,t). \tag{6.25}$$

因为 $f_x(x,y)$ 关于 x,y 是 $m-1$ 阶连续可微的, 所以根据归纳假设, $f_x(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 $s,\ t$ 是 $m-1$ 阶连续可微的, 并且 $\varphi_s(s,t)$ 关于 $s,\ t$ 也是 $m-1$ 阶连续可微函数. 令 $p(x,y)=xy$, 则 $p(x,y)$ 关于 $x,\ y$ 也是 $m-1$ 阶连续可微的. 所以, 根据归纳假设,

$$f_x(\varphi(s,t),\psi(s,t))\varphi_s(s,t)=p(f_x(\varphi(s,t),\psi(s,t)),\varphi_s(s,t))$$

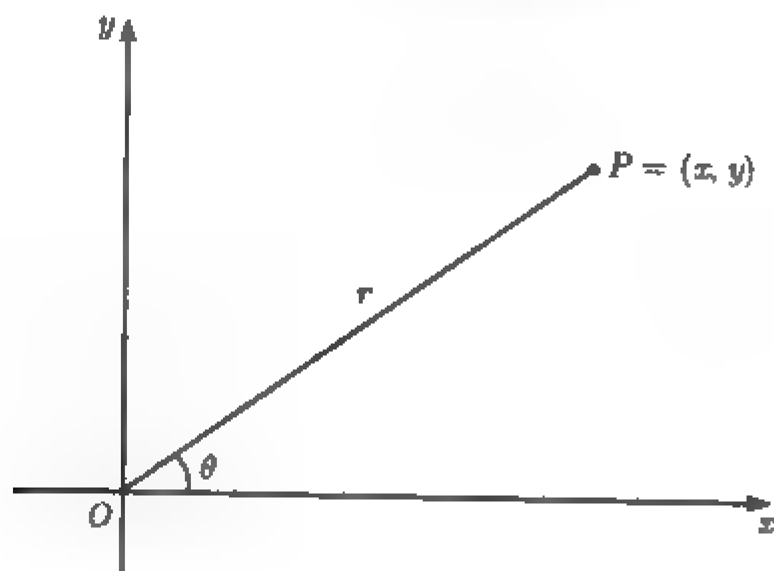
关于 s,t 是 $m-1$ 阶连续可微的. 同理, $f_y(\varphi(s,t),\psi(s,t))\psi_s(s,t)$ 关于 s,t 也是 $m-1$ 阶连续可微函数. 因此, 根据 (6.25) 式, $F_s(s,t)$ 关于 $s,\ t$ 是 $m-1$ 阶连续可微的, $F_t(s,t)$ 关于 s,t 也同样是 $m-1$ 阶连续可微的. □

推论 如果函数 $\varphi(s,t),\psi(s,t)$ 是 $s,\ t$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且 $f(x,y)$ 是 D 上的关于 x,y 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 那么复合函数 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 是 s,t 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

例 6.8 设平面 $\mathbf{R}^2$ 上从原点 O 到点 $P=(x,y)$ 的距离为 r, 线段 OP 与 x 轴正向的夹角为 θ, 则根据 2.4 节中 $\sin\theta,\cos\theta$ 的定义,

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

称 (r,θ) 为点 $P=(x,y)$ 的极坐标. 因为 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 是两个变量 r, θ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 所以若 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上关于 x, y 的二阶连续可微函数, 则复合函数 $z=f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 关于 r, θ 是二阶连续可微的.



因为

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,$$

所以, 根据 (6.24) 式,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\theta,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)r\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta.$$

从而, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad r>0. \tag{6.26}$$

例如, 令 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 因为 $z=\ln r$, 所以 $\partial z/\partial r=1/r, \partial z^2/\partial r^2=-1/r^2$. 因此根据 (6.26) 式,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\sqrt{x^2+y^2}=0,\quad (x,y)\neq(0,0).$$

令 $f(x,y)$ 是关于 x 和 y 的多项式, 则 $f(x,y)$ 关于 x, y 可偏微, 并且其偏导函数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 也是多项式. 因此, x, y 的多项式关于 x, y 任意阶可微, 即关于

x, y 的多项式是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 因而, 若函数 $\varphi(s,t), \psi(s,t)$ 在某个领域 E 上 n 阶连续可微, 则根据定理 6.14, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ 的多项式 $f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 也在 E 上 n 阶连续可微.

关于 x, y 的有理式 $q(x,y) = f(x,y)/g(x,y)$(其中 $f(x,y), g(x,y)$ 是 x, y 的多项式), 若在领域 D 上 $g(x,y) \neq 0$, 则它关于 x, y 可偏微, 并且其偏导函数 $q_x(x,y), q_y(x,y)$ 是以 $(g(x,y))^2$ 为分母的有理式. 所以 $q(x,y)$ 是 D 上关于 x, y 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数. 因此, 函数 $\varphi(s,t), \psi(s,t)$ 在 E 上 n 阶连续可微, 并且若 $g(\varphi(s,t), \psi(s,t)) \neq 0$, 则 $q(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 也在 E 上 n 阶连续可微. 即下面的结论成立.

定理 6.15 如果定义在某领域上的函数 $f(x,y), g(x,y)$ 是 $\mathscr{C}^n$ 类函数, 则 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 的多项式为 $\mathscr{C}^n$ 类函数, 并且 $f(x,y), g(x,y)$ 的有理式, 若其分母不为 0, 则它是 $\mathscr{C}^n$ 类函数. 进而, 若 $f(x,y), g(x,y)$ 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 则 $f(x,y), g(x,y)$ 的多项式为 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 并且 $f(x,y), g(x,y)$ 的有理式, 若其分母不为 0, 则它是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

f) Taylor 公式

关于一元函数的 Taylor 公式 (3.39) 中, 将 x 用 $a+h$ 替换, 则可写成

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n, \quad 0 < \theta < 1,$$

在本小节中我们将此公式推广到二元函数的情况.

设 $f(x,y)$ 是定义在领域 D 上的 $\mathscr{C}^n$ 类函数, $A=(a,b)$ 是属于 D 的点. 并且对于点 $P=(a+h,b+k)$, 设线段 $AP = \{(a+th, b+tk) | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 属于 D. 那么, 对于充分小的正实数 ε,

$$\text{只要 } -\varepsilon < t < 1+\varepsilon, \quad \text{就有 } (a+th, b+tk) \in D \text{ 成立}.$$

所以根据定理 6.11, $f(a+th, b+tk)$ 是定义在开区间 $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ 上的 n 阶连续可微函数. 再根据 (6.18) 式,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+th,b+tk) = hf_x(a+th,b+tk) + kf_y(a+th,b+tk).$$

若将 $x=a+th, y=b+tk$ 代入上式右端, 得到两个变量 x, y 的二元函数:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = hf_x(x,y) + kf_y(x,y),$$

则右边可写成

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+th,b+tk),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(a+th,b+tk)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+th,b+tk).$$

此式中将 $f(x,y)$ 用 $(h\,\partial/\partial x+k\,\partial/\partial y)f(x,y)$ 替换, 则可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}f(a+th,b+tk)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+th,b+tk).$$

当然, 这里 $(h\,\partial/\partial x+k\,\partial/\partial y)^2$ 表示 $(h\,\partial/\partial x+k\,\partial/\partial y)(h\,\partial/\partial x+k\,\partial/\partial y)$. 同理, 对于小于 n 的任意自然数 m, 可得

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}f(a+th,b+tk)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+th,b+tk). \tag{6.27}$$

令 $F(t)=f(a+th,b+tk)$, 则根据 Taylor 公式 (3.39), 当 $-\varepsilon<t<1+\varepsilon$ 时,

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n,\quad 0<\theta<1.$$

显然此式当 $t=1$ 时也成立, 所以, 若令 $t=1$, 则根据 (6.27) 式,

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a,b)+R_n, \tag{6.28}$$

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k),\quad 0<\theta<1.$$

这就是二元函数的 Taylor 公式.

根据定理 6.7, 在 $(h\,\partial/\partial x+k\,\partial/\partial y)^m f(x,y)$ 中, 因为 $(\partial/\partial x)(\partial/\partial y)=(\partial/\partial y)(\partial/\partial x)$, 所以根据二项式定理,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=\sum_{q=0}^{m}\binom{m}{q}h^{m-q}k^q\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^{m-q}\partial y^q}.$$

因为 $\binom{m}{q}=\frac{m!}{p!q!}$, $p=m-q$, 所以 Taylor 公式 (6.28) 可以改写成

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\sum_{1\leqslant p+q\leqslant n-1}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(a,b)}{\partial x^p\partial y^q}h^pk^q+R_n, \tag{6.29}$$

$$R_n=\sum_{p+q=n}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^n}{\partial x^p\partial y^q}f(a+\theta h,b+\theta k)h^pk^q,\quad 0<\theta<1,$$

其中, $\partial^{p+q}f(a,b)/\partial x^p\partial y^q$ 是偏导函数 $\partial^{p+q}f(x,y)/\partial x^p\partial y^q$ 在 $x=a$, $y=b$ 处的值, 并且 $\sum\limits_{1\leqslant p+q\leqslant n-1}$ 表示所有满足 $1\leqslant p+q\leqslant n-1$ 的非负整数对 (p,q) 的和; $\sum\limits_{p+q=n}$ 表示所有满足 $p+q=n$ 的非负整数对 (p,q) 的和, 称 R_n 为余项. 令 $x=a+h, y=b+k$, 则 (6.29) 式可以改写为

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{1\leqslant p+q\leqslant n-1}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(a,b)}{\partial x^p\partial y^q}(x-a)^p(y-b)^q+R_n, \tag{6.30}$$

$$R_n=\sum_{p+q=n}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(\xi,\eta)}{\partial x^p\partial y^q}(x-a)^p(y-b)^q,$$

$$\xi=a+\theta(x-a),\quad \eta=b+\theta(y-b),\quad 0<\theta<1.$$

使线段 AP 包含于 D 的点 $P=(x,y)$ 的全体集合用 D_A 表示: $D_A=\{P|AP\subset D\}$, 则 D_A 显然是 D 的子领域. 在 Taylor 公式 (6.30) 中当然假设了 $(x,y)\in D_A$. 若 $f(x,y)$ 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 则对任意自然数 n, (6.30) 式成立. 此时, 若在某领域 $W(A\in W\subset D_A)$ 上的每一点处,

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0,$$

则 $f(x,y)$ 作为 W 上无穷级数的和, 可以表示为

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{1}{p!q!}\frac{\partial^{p+q}f(a,b)}{\partial x^p\partial y^q}(x-a)^p(y-b)^q. \tag{6.31}$$

g) 二重级数

运用上述公式 (6.31), 对二重级数进行阐述.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

称这样排列的实数为**二重序列**(double sequence), 记为 $\{a_{mn}\}$. 若全体自然数集合用 $\mathbf{N}$ 表示, 则二重序列 $\{a_{mn}\}$是定义在直积 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的两个变量 m, n 的二元函数: $a(m,n)=a_{mn}$. 有时 a_{mn} 也写成 $a_{m,n}$.

定义 6.5 设 $\{a_{mn}\}$是二重序列. 如果存在一个实数 α, 使得对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$,

$$\text{只要 } m > n_0(\varepsilon), n > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |a_{mn} - \alpha| < \varepsilon \text{ 成立},$$

那么就称二重序列$\{a_{mn}\}$收敛于 α, 记为

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn} = \alpha.$$

并且称 α 为二重序列$\{a_{mn}\}$的极限或极限值.

与数列的情况相同, 当二重序列收敛于某实数时, 称 $\{a_{mn}\}$收敛, 极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$ 存在等.

定理 6.16 (Cauchy 判别法) 二重序列$\{a_{mn}\}$收敛的充分必要条件是对于任意正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } m \geqslant p > n_0(\varepsilon), \quad n \geqslant q > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有 } |a_{mn} - a_{pq}| < \varepsilon \text{ 成立}. \tag{6.32}$$

证明 必要条件显然成立, 所以只须证明充分条件, 即证明满足条件的二重序列$\{a_{mn}\}$收敛于某个实数 α 即可. 令 $a_n = a_{nn}$, 则根据 (6.32) 式,

$$\text{当 } n \geqslant q > n_0(\varepsilon) \text{ 时}, \quad |a_n - a_q| < \varepsilon.$$

因此根据 Cauchy 判别法 (1.4 节定理 1.13), 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并设其极限为 α. 在 (6.32) 式中如果分别用 p, q 替换 m, n 用 m, n 替换 q, 那么

$$\text{当 } q \geqslant m > n_0(\varepsilon), \quad q \geqslant n > n_0(\varepsilon) \text{ 时}, \quad |a_{mn} - a_q| < \varepsilon.$$

因为 $\lim\limits_{q\to\infty} a_q = \alpha$, 所以

$$\text{当 } m > n_0(\varepsilon), \quad n > n_0(\varepsilon) \text{ 时}, \quad |a_{mn} - \alpha| \leqslant \varepsilon.$$

其中 ε 是任意的正实数. 因此二重序列$\{a_{mn}\}$收敛于 α. □

二重序列的极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$ 与按顺序取极限所得的 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ 和 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ 具有不同的含义.

例 6.9 令 $a_{mn} = a_{m,n} = 2mn/(m^2 + n^2)$, 则 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, 但是极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$ 不存在. 这是因为, 任取自然数 k, 并且令 $m=kn$ 时,

$$a_{mn} = a_{kn,n} = \frac{2k}{k^2+1},$$

若极限 $\alpha = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$ 存在, 则对于所有自然数 k, $\alpha = 2k/(k^2+1)$, 由此产生矛盾.

例 6.10 令 $a_{mn} = (-1)^n/m + (-1)^m/n$, 则存在极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn} = 0$, 但是 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ 都不存在.

定理 6.17 设极限 $\alpha = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$ 存在. 如果对于每一个 n, 极限 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$ 存在, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \alpha$. 并且如果对于每一个 m, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}$ 存在, 那么 $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn} = \alpha$.

证明 根据假设, 对于任意正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } m > n_0(\varepsilon),\quad n > n_0(\varepsilon),\quad \text{就有 } |a_{mn} - \alpha| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

令 $l_n = \lim\limits_{m\to\infty} a_{mn}$, 则

$$\text{当 } n > n_0(\varepsilon) \text{ 时, } |l_n - \alpha| \leqslant \varepsilon \text{ 成立.}$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \alpha$. □

设 $\{a_{mn}\}$是二重序列, 则称具有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

形式的式子为**二重级数**(double series), 并且称 a_{mn} 为它的项. 对于二重级数, 称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**简单级数**(simple series). 同简单级数的情况相同, 对于二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$, 我们考虑其部分和:

$$s_{mn} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq},$$

当二重序列 $\{s_{mn}\}$ 收敛时, 称二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 收敛. 称 $s = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} s_{mn}$ 为二重级数的和, 并且记为

$$s = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

当二重序列 $\{s_{mn}\}$ 不收敛时, 称二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 发散. 另外, 以各项 a_{mn} 的绝对值 $|a_{mn}|$ 为项的二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ 收敛时, 称二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 为绝对收敛.

令

$$\sigma_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}|,$$

则

$$当 m \geqslant p, n \geqslant q 时, |s_{mn}-s_{pq}| \leqslant \sigma_{mn}-\sigma_{pq},$$

所以根据 Cauchy 判别法 (定理 6.16), **绝对收敛的二重级数是收敛的**.

因为

$$当 m \geqslant p,\quad n \geqslant q 时,\quad \sigma_{pq} \leqslant \sigma_{mn}, \tag{6.33}$$

所以若 $\{\sigma_{mn}\}$ 收敛, 则 $\sigma_{pq} \leqslant \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \sigma_{mn}$, 因此二重序列 $\{\sigma_{mn}\}$ 有界. 反之, 若 $\{\sigma_{mn}\}$ 有界, 则$\{\sigma_{mn}\}$收敛. 这是因为, 当 $\sigma_n = \sigma_{nn}$ 时, 序列 $\{\sigma_n\}$ 有界, 并且根据 (6.33) 式, 它单调非减. 从而根据 1.5 节定理 1.20, $\{\sigma_n\}$ 收敛. 并且根据 (6.33) 式, σ_{mn} 介于 σ_m 和 σ_n 之间, 即二重级数 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛的充分必要条件是对于所有的自然数 m, n, 存在满足

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}| \leqslant M \tag{6.34}$$

的常数 M. 若 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$ 绝对收敛, 则按任意的顺序将所有的项 $a_{m,n}$ 排成一列得到的简单级数也绝对收敛, 并且其和为 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}$. 例如简单级数

$$a_{1,1}+a_{2,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{n,1}+a_{n-1,2}+\cdots+a_{1,n}+\cdots$$

绝对收敛, 并且

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p+q=n} a_{p,q} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n}. \tag{6.35}$$

根据 (6.34) 式, 将 $a_{m,n}$ 排成一列而得到的简单级数显然绝对收敛. 并且根据定理 5.1 的 (1), 绝对收敛的简单级数的和不会随各项顺序的变化而变化, 所以只须证明等式 (6.35) 成立即可说明该级数的和等于 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$. 显然, 当 $m\to\infty$ 时,

$$\left|\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{p,q} - \sum_{n=2}^{m}\sum_{p+q=n} a_{p,q}\right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{2m}\sum_{p+q=n}|a_{p,q}| \to 0,$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{p+q=n} a_{p,q} = \lim_{m\to\infty}\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{m} a_{p,q} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{m,n},$$

即 (6.35) 式成立.

此外, 若 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛, 则对于每一个 m, 简单级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛, 以其和为项的简单级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$ 也绝对收敛, 并且等式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} \tag{6.36}$$

成立. [证明] 根据假设, (6.34) 的不等式 $\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}|a_{pq}| \leqslant M$ 成立. 所以, 对于每一个 m, $\sum_{q=1}^{n}|a_{mq}| \leqslant M$, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛. 又因为

$$\sum_{p=1}^{m}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{pn}\right| \leqslant \sum_{p=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{pn}| \leqslant M$$

所以 $\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$ 也绝对收敛. 若考虑部分和 $s_{mn} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}$, 因为极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} s_{mn}$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_{mn}$ 存在, 所以根据定理 6.17,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} s_{mn} = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} s_{mn},$$

即 (6.36) 式成立. □

同理, 若 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛, 则 $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ 也绝对收敛, 并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}. \tag{6.37}$$

如果二重级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 收敛, 但非绝对收敛时, 称二重级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 为条件收敛. 二重级数的条件收敛是复杂的. $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 的各项 a_{mn} 可以用部分和 $s_{m,n} = \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}$ 表示为

$$a_{mn} = s_{m,n} - s_{m,n-1} - s_{m-1,n} + s_{m-1,n-1}$$

所以, 若 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn}=0$, 在条件收敛时, $\{a_{mn}\}$ 未必有界.

例 6.11 令 $a_{11}=-1$, $a_{n1}=a_{1n}=-n$, $a_{n2}=a_{2n}=n$, $n=2,3,4,\cdots$, 则观察

$$\begin{array}{cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-4 & 4 & a_{34} & a_{44} & a_{54} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 3 & a_{33} & a_{43} & a_{53} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-2 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & -2 & -3 & -4 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

可知, 当 $m\geqslant 3, n\geqslant 3$ 时,

$$s_{m,n}=-3+\sum_{p=3}^{m}\sum_{q=3}^{n}a_{pq}$$

因此, 若二重级数 $\sum\limits_{m,n=3}^{\infty} a_{mn}$ 收敛, 则 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 也收敛, $\{a_{mn}\}$显然是无界的.

当 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 绝对收敛时, $\{a_{mn}\}$一定有界.

形如 $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 的二重级数称为**两个变量 x, y 的幂级数**. 对于平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点 $(\xi,\eta), \xi\neq 0, \eta\neq 0$, 若二重序列 $\{a_{mn}\xi^m\eta^n\}$ 有界, 则当 $|x|<|\xi|$, $|y|<|\eta|$ 时, 幂级数 $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 绝对收敛. 当然二重序列 $\{a_{mn}\xi^m\eta^n\}$ 中的 m,n 的定义域为全体非负整数 $\{0\}\cup\mathbf{N}$. [证明] 根据假设,

$$|a_{mn}\xi^m\eta^n|<M, \quad M \text{ 是常数},$$

所以

$$|a_{mn}|<\frac{M}{|\xi|^m|\eta|^n}.$$

又因为 $|x|/|\xi|<1$, $|y|/|\eta|<1$, 所以

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}|a_{pq}x^p y^q| &\leqslant M\sum_{p=0}^{m}\left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^p\sum_{q=0}^{n}\left(\frac{|y|}{|\eta|}\right)^q \leqslant M\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{|x|}{|\xi|}\right)^p\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{|y|}{|\eta|}\right)^q \\
&=\frac{M\,|\xi|\,|\eta|}{(|\xi|-|x|)(|\eta|-|y|)}<+\infty.
\end{aligned}$$

因此，$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 绝对收敛. □

令

$$U_{\xi,\eta} = \{(x,y)\,||x| < |\xi|, \quad |y| < |\eta|\}, \tag{6.38}$$

即 $(x,y) \in U_{\xi,\eta}$ 时，幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 绝对收敛. 对于 $\{a_{mn}\xi^m\eta^n\}$ 有界的所有的点 (ξ,η), $\xi \neq 0, \eta \neq 0$, 根据 (6.38) 式可分别确定开矩形 $U_{\xi,\eta}$, 令其并集为

$$G = \cup U_{\xi,\eta},$$

G 显然是 $\mathbf{R}^2$ 上的领域，并且若 $(x,y) \in G$, 则幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 绝对收敛. 反之，若 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 绝对收敛，则当 $x \neq 0, y \neq 0$ 时，(x,y) 属于 G 的闭包 $[G]$. 这是因为，此时根据上面结果 $U_{x,y} \subset G$, 所以 $(x,y) \in [U_{x,y}] \subset [G]$. 因此当 $(x,y) \notin [G], x \neq 0, y \neq 0$ 时，幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 不绝对收敛. 称领域 G 为幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$ 的**收敛域**. 当幂级数 $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n$在所有的点 $(x,y), x \neq 0, y \neq 0$, 上都不绝对收敛时，其收敛域为空集.

如在前一小节结尾处所述，对于 $A \in W \subset D_A$ $(A = (a,b))$ 的某领域 W 的每一点 (x,y) 处，若 Taylor 公式 (6.30) 式的余项 R_n 当 $n \to \infty$ 时收敛于 0, 则在 W 上 (6.31) 式的公式：

$$f(x,y) = f(a,b) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} f(a,b)}{\partial x^p \partial y^q}(x-a)^p(y-b)^q$$

成立. 右边作为 $x-a, y-b$ 的幂级数，写成

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f(a,b)}{\partial x^m \partial y^n}(x-a)^m(y-b)^n,$$

假设其收敛域非空，并令其收敛域为 G, 则根据 (6.31) 式和 (6.35) 式，在点 (a,b) 的邻域[1] $W \cap G$ 上，$f(x,y)$ 可以表示为 $x-a, y-b$ 的绝对收敛幂级数的和：

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f(a,b)}{\partial x^m \partial y^n}(x-a)^m(y-b)^n. \tag{6.39}$$

① 称包含平面上点 A 的任意开集合为 A 的邻域. 这已经在 1.6 节 c) 中阐述.

此公式右侧的幂级数称为以点 (a,b) 为中心的 **Taylor 级数**, 或者称为 $f(x,y)$ 的以 (a,b) 为中心的 **Taylor 展开**. 用 (6.39) 式的形式表示的 $f(x,y)$ 称为 $f(x,y)$ 的以 (a,b) 为中心的 Taylor 展开.

例 6.12 举一个非常简单的定义在领域 $D=\{(x,y)\,||x+y|<1\}$ 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数:

$$f(x,y)=\frac{1}{1-x-y}$$

的以原点 (0,0) 为中心的 Taylor 展开的例子. 因为

$$\frac{\partial^{m+n}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{(m+n)!}{(1-x-y)^{m+n+1}},$$

所以, 以 (0,0) 为中心的 $f(x,y)$ 的 Taylor 展开为:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}x^my^n. \tag{6.40}$$

若将上式改写成如 (6.31) 式右边的级数, 则根据二项式定理,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}x^py^q=1+\sum_{n=1}^{\infty}(x+y)^n.$$

显然, 当 $|x+y|<1$ 时, 该级数绝对收敛, 并且其和等于 $1/(1-x-y)=f(x,y)$. 此时的 $f(x,y)$ 在定义域 D 的所有点处使得 (6.31) 式都成立. 所以当 $n\to\infty$ 时, Taylor 公式 (6.30) 的余项 R_n 收敛于 0. 但是, 当 $|x+y|\geqslant 1$ 时, Taylor 级数 (6.40) 式不一定绝对收敛. 若 (6.40) 式绝对收敛, 则根据 (6.35) 式,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{(p+q)!}{p!q!}|x|^p\,|y|^q=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}|x|^m\,|y|^n<+\infty,$$

因而, 必有 $|x|+|y|<1$. 反之, 若 $|x|+|y|<1$, 则

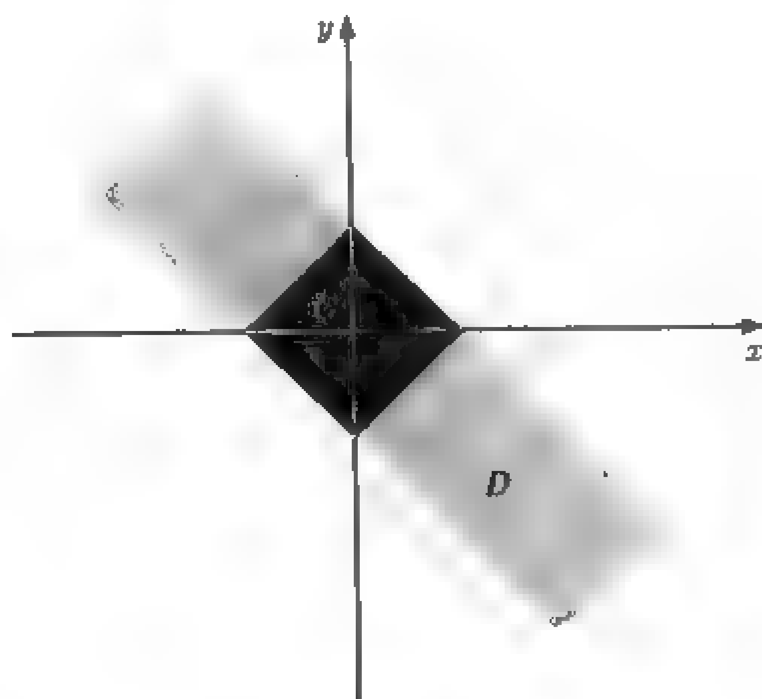
$$\sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n}\frac{(p+q)!}{p!q!}|x|^p\,|y|^q\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n<+\infty,$$

所以, (6.40) 式绝对收敛. 因此 Taylor 级数 (6.40) 式的收敛域是 $G=\{(x,y)\,||x|+|y|<1\}$, 并且 Taylor 展开

$$\frac{1}{1-x-y}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!n!}x^my^n$$

仅在 G 上成立.

定义在领域 D 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数 $f(x,y)$, 当它在 D 上的每一点 (a,b) 的某个邻域上可以展成以 (a,b) 为中心的 Taylor 级数时, 称 $f(x,y)$ 为两个变量 x,y 的二元**实解析函数**.



6.3 极限的顺序

a) 极限的顺序

假设二重序列 $\{a_{mn}\}$ 存在极限 $\alpha_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$. $\alpha_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$ 表示对于任意正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon,m)$, 使得

$$\text{当 } n > n_0(\varepsilon,m) \text{ 时,} \quad \text{有} \quad |a_{mn} - \alpha_m| < \varepsilon.$$

一般地, $n_0(\varepsilon,m)$ 也与 m 有关. 如果此处假设 $n_0(\varepsilon,m) = n_0(\varepsilon)$ 不依赖于 m, 则称当 $n\to\infty$ 时, 关于 m, a_{mn} 收敛于 α_m 是**一致的**, 或者称 $a_{mn}\to\alpha_m(n\to\infty)$ 关于 m 一致收敛, 或者称当 $n\to\infty$ 时, a_{mn} 关于 m 一致收敛于 α_m.

如上一小节例 6.9 所述, 即使 $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ 存在, $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn}$ 也未必存在. 但是如果 $n\to\infty$ 时, a_{mn} 关于 m 一致收敛于α_m, 并且 $m\to\infty$ 时, α_m 收敛于 α, 那么二重序列 $\{a_{mn}\}$ 收敛于 α: $\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn} = \alpha$. [证明] 对于任意正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, $m_0(\varepsilon)$, 使得

$$\begin{aligned}&\text{当 } n > n_0(\varepsilon) \text{ 时,} \quad |a_{mn} - \alpha_m| < \varepsilon,\\ &\text{当 } m > m_0(\varepsilon) \text{ 时,} \quad |\alpha_m - \alpha| < \varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$当\ m > m_0(\varepsilon), n > n_0(\varepsilon)\ 时,\quad |a_{mn} - \alpha| < 2\varepsilon\ 成立.$$

因此, $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn} = \alpha$. □

二重序列 $\{a_{mn}\}$ 是定义在 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的两个变量 m, n 的二元函数, 对于定义在实直线上的二个区间 I, J 的直积 $I\times J$ 上的两个变量 x, y 的二元函数 $f(x,y)$, 也有同样的结果成立.

如果当 x 固定时, $f(x,y)$ 关于 y 连续, 那么对于每一个 $b\in J$, $\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = f(x,b)$. 当此收敛是关于 x 一致时, 则对于任意的正实数 ε, 存在不依赖于 x 的正实数 $\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, b)$, 使得

$$若\ |y - b| < \delta(\varepsilon),\quad 则\quad |f(x,y) - f(x,b)| < \varepsilon$$

成立, 称函数 $f(x,y)$ 关于 x 一致, 关于 y 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 关于 x 连续, 并且关于 x 一致, 关于 y 连续, 那么 $f(x,y)$ 作为两个变量 x, y 的二元函数连续. [证明] 任取点 $(a,b)\in I\times J$, 则根据假设, 对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$只要\ |y - b| < \delta(\varepsilon),\quad 就有\quad |f(x,y) - f(x,b)| < \varepsilon\ 成立.$$

又因为 $f(x,b)$ 关于 x 连续, 所以存在正实数 $\gamma(\varepsilon)$, 使得

$$只要\ |x - a| < \gamma(\varepsilon),\quad 就有\quad |f(x,b) - f(a,b)| < \varepsilon\ 成立.$$

所以

$$只要\ |x - a| < \gamma(\varepsilon),\quad |y - b| < \delta(\varepsilon),\quad 就有\quad |f(x,y) - f(a,b)| < 2\varepsilon\ 成立.$$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, 又因为 (a,b) 是 $I\times J$ 上任意点, 所以 $f(x,y)$ 是两个变量 x, y 的二元连续函数. □

令 $f(x,y)$ 是例 6.2 中的函数. $f(x,y)$ 关于 x 和 y 都连续, 但是作为两个变量 x, y 的二元函数在原点 $(0,0)$ 处不连续. $f(x,0) = 0$, 当 $y \neq 0$ 时, $f(x,y) = 2xy/(x^2+y^2)$. 所以对于给定的 ε, $0<\varepsilon<1$, 要证明

$$只要\ |y| < \delta,\quad 就有\quad |f(x,y) - f(x,0)| < \varepsilon\ 成立,$$

显然, 必须要求不等式

$$\delta \leqslant |x|\,\varepsilon/(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})$$

成立. 因此, 收敛的极限 $\lim_{y\to 0} f(x,y) = f(x,0)$ 关于 x 不一致收敛.

定理 6.18 如果二重序列 $\{a_{mn}\}$ 存在极限 $\alpha_m = \lim_{n\to\infty} a_{mn}$ 和 $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$, 并且 $a_{mn} \to \alpha_m (n \to \infty)$ 的收敛关于 m 一致, 那么极限 $\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ 和 $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ 都存在, 并且等式

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} \tag{6.41}$$

成立.

证明 根据假设, 对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } n > n_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |a_{mn} - \alpha_m| < \varepsilon \text{ 成立.} \tag{6.42}$$

又对于每一个 n, 存在自然数 $m_0(\varepsilon, n)$, 使得

$$\text{只要 } m > k > m_0(\varepsilon, n), \quad \text{就有} \quad |a_{mn} - a_{kn}| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

因此, 对于给定的 ε, 若确定一个满足 $n > n_0(\varepsilon)$ 的 n, 并且令 $m_0(\varepsilon) = m_0(\varepsilon, n)$, 则

$$|\alpha_m - \alpha_k| \leqslant |\alpha_m - a_{mn}| + |a_{mn} - a_{kn}| + |a_{kn} - \alpha_k|,$$

所以

$$\text{只要 } m > k > m_0(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |\alpha_m - \alpha_k| < 3\varepsilon \text{ 成立,}$$

其中 ε 是任意正实数. 因此根据 Cauchy 判别法, 极限 $\lim_{m\to\infty} \alpha_m$ 存在. 再根据 (6.42) 式,

$$\text{当 } n > n_0(\varepsilon) \text{ 时}, \quad \left|\lim_{m\to\infty} a_{mn} - \lim_{m\to\infty} \alpha_m\right| \leqslant \varepsilon \text{ 成立.}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}. \qquad \square$$

根据定理 6.18, 在 $a_{mn} \to \alpha_m (n \to \infty)$ 的收敛是 "关于 m 一致" 这一假设下, 极限 $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ 与 $\lim_{m\to\infty}$ 和 $\lim_{n\to\infty}$ 的顺序无关, 即改变 $\lim_{m\to\infty}$ 和 $\lim_{n\to\infty}$ 顺序其值不变. 但在没有条件限制时, 它不成立.

例 6.13 令 $a_{mn} = (-1)^n m/(m+n)$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = (-1)^n$, 但是极限 $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在.

又如, 若令 $a_{mn} = m/(m+n)$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0$, $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 1$, 并且极限 $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 1$ 存在, 但等式 (6.41) 式不成立. 因此, 根据定理 6.18, $a_{mn} \to 0 (n \to \infty)$ 的收敛不应该关于 m 一致. 事实上, 对给定的 $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, 若当

$n > n_0$ 时, $a_{mn} < \varepsilon$, 则 $m < \varepsilon(m + n_0 + 1)$, 所以 $n_0 > (1/\varepsilon - 1)m - 1$. 因此, 对于所有的 m, 当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, 不存在满足 $a_{mn} < \varepsilon$ 的 $n_0(\varepsilon)$.

二重序列 $\{a_{mn}\}$ 是定义在 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 上的两个变量 m, n 的二元函数 $a(m,n) = a_{mn}$. 如果把定义在实直线 $\mathbf{R}$ 的某区间 I 上的函数序列 $\{f_n(x)\}$, 看作是定义在 $I \times \mathbf{N}$ 上的关于 x 和 n 的函数 $f(x,n) = f_n(x)$, 则关于函数 $f(x,n)$ 上述定理 6.18 的结论同样成立. 即当函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛时, 对于点 $c \in I$, 若极限 $\lim\limits_{x\to c} f_n(x)$ 存在, 则极限 $\lim\limits_{x\to c}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to c} f_n(x)$ 都存在, 并且等式

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} f_n(x) \tag{6.43}$$

成立. 特别地, 当函数 $f_n(x)$ 在区间 I 上连续且 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛时, 对于任意点 $c \in I$, $\lim\limits_{x\to c} f_n(x) = f_n(c)$, 所以根据 (6.43) 式,

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(c).$$

即 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 在 I 上连续. 此结果符合 5.3 节的定理 5.5 的 (1).

如果函数 $f_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续, 并且函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{6.44}$$

这是 5.4 节的定理 5.8. 因为定积分是有限和的极限, 所以定理 5.8 也是与极限的顺序有关的定理. 实际上用定理 6.18 可以如下直接证明 (6.44) 式: 如 4.1 节定理 4.2 所述, 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} g(x_k), \quad x_k = a + \frac{k(b-a)}{m}.$$

根据已知条件, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 所以 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 并且对于任意的正实数 ε, 存在自然数 $n_0(\varepsilon)$, 使得

$$\text{当 } n > n_0(\varepsilon) \text{ 时,} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

令

$$a_{mn} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f_n(x_k), \quad \alpha_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(x_k),$$

则

$$\text{当 } n > n_0(\varepsilon) \text{ 时,} \quad |a_{mn} - \alpha_m| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

即当 $n \to \infty$ 时, a_{mn} 关于 m 一致收敛于 α_m. 并且极限

$$\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

存在. 因此, 根据定理 6.18,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\alpha_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$ □

b) 积分号下的微积分

引理 6.1 设 $f(x,t)$ 是定义在 $\{(x,t)\,|a\leqslant x\leqslant b, 0<|t-c|<\rho\}$ 上的两个变量 x,t 的二元有界函数, 并且当 t 固定时, $f(x,t)$ 是关于 x 的连续函数. 如果对于每一个 x, 极限 $f(x)=\lim\limits_{t\to c}f(x,t)$ 存在, 并且 $f(x)$ 关于 x 连续, 那么

$$\lim_{t\to c}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad f(x)=\lim_{t\to c}f(x,t). \tag{6.45}$$

证明 假设 (6.45) 式不成立, 则对于某正实数 ε, 存在满足

$$0<|t_n-c|<\frac{1}{n},\quad \left|\int_a^b f(x,t_n)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon \tag{6.46}$$

的数列 $\{t_n\}$. 令 $f_n(x)=f(x,t_n)$, 则函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致有界, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 因此根据 Arzelà 定理 (5.4 节定理 5.10), $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 这与 (6.46) 式矛盾. □

当函数 $f(x,t)$ 的定义域是 $\{(x,t)|a\leqslant x\leqslant b, 0<t-c<\rho\}$ 或者是 $\{(x,t)|a\leqslant x\leqslant b, -\rho<t-c<0\}$ 时, 此引理仍然成立.

定理 6.19 设 $f(x,t)$ 是定义在矩形 $K=\{(x,t)\,|a\leqslant x\leqslant b, \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上的有界函数, 并且当 t 固定时关于 x 连续, 当 x 固定时关于 t 连续. 那么

(1) $F(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 是闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的关于 t 的连续函数.

(2) 若 $f(x,t)$ 关于 t 可偏微, 偏导函数 $f_t(x,t)$ 在 K 上有界且当 t 固定时关于 x 连续, 则 $F(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 是关于 t 的可微函数, 并且其导函数为

$$F'(t)=\int_a^b f_t(x,t)\mathrm{d}x \tag{6.47}$$

(3)

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x. \tag{6.48}$$

证明 (1) 根据引理 6.1, 对于任意点 c, $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$,

$$\lim_{t\to c}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{t\to c} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,c)\mathrm{d}x,$$

即 $\lim\limits_{t\to c} F(t) = F(c)$. 所以, $F(t)$ 是关于 t, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 的连续函数.

(2) 对于任意的点 c, $\alpha \leqslant c \leqslant \beta$, 只须证明函数 $F(t)$ 在 $t = c$ 处可微, 并且 $F'(c) = \int_a^b f_t(x,c)\mathrm{d}x$ 即可. 为此, 令

$$q(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x,c)}{t-c}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \quad t \neq c,$$

当 t 固定时, $q(x,t)$ 关于 x 连续. 根据中值定理 (定理 3.5),

$$q(x,t) = f_t(x, c+\theta(t-c)), \quad 0 < \theta < 1,$$

并且根据假设, $f_t(x,t)$ 有界从而 $q(x,t)$ 也有界. 进而根据假设, $\lim\limits_{t\to c} q(x,c) = f_t(x,c)$, 并且 $f_t(x,c)$ 关于 x 连续. 因此, 又根据引理 6.1,

$$\lim_{t\to c}\frac{F(t)-F(c)}{t-c} = \lim_{t\to c}\int_a^b q(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b f_t(x,c)\mathrm{d}x.$$

即 $F(t)$ 在 $t = c$ 处可微, 并且 $F'(c) = \int_a^b f_t(x,c)\mathrm{d}x$.

(3) 令

$$g(x,t) = \int_\alpha^t f(x,u)\mathrm{d}u, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

首先验证 $g(x,t)$ 满足 (2) 中 $f(x,t)$ 的条件. 因为 $f(x,t)$ 在 K 上有界, 即存在常数 M 满足 $|f(x,t)| \leqslant M$, 所以 $|g(x,t)| \leqslant M(\beta-\alpha)$, 即 $g(x,t)$ 在 K 上也有界. 根据 (1), 当 t 固定时 $g(x,t)$ 关于 x 连续. 当 x 固定时, 显然 $g(x,t)$ 关于 t 连续可微, 并且 $g_t(x,t) = f(x,t)$, 所以 $g_t(x,t)$ 在 K 上有界且关于 x 连续. 因此根据 (2), 对于函数 $g(x,t)$, (6.47) 式成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b g(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b g_t(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x.$$

根据 (1), 此式右侧是关于 t 的连续函数. 所以, 若两边取从 α 到 β 的关于 t 的积分, 则因为 $g(x,\alpha) = 0$, 得

$$\int_a^b g(x,\beta)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t,$$

即得

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t. \qquad \square$$

(6.47) 式即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\mathrm{d}x. \tag{6.49}$$

例如 $\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ 可以写成 $\int_\alpha^\beta \mathrm{d}t \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$. 利用这种记法, (6.48) 式可改写成

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}t \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{6.50}$$

(6.49) 式和 (6.50) 式表示, 在一定条件下, 对积分 $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 进行微分或积分, 只须对它的被积分函数 $f(x,t)$ 关于 t 进行微分或积分即可. 积分 $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 的被积分函数 $f(x,t)$ 关于 t 的微分或积分称为 $\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$ 在**积分号下的微分或积分.**

定义在矩形 $K = \{(x,t)\,|a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ 上的函数 $f(x,t)$ 作为两个变量 x,t 的二元函数, 若在 K 上连续, 则根据 6.1 节的定理 6.3, $f(x,t)$ 在 K 上有界. 可是, 即使函数 $f(x,t)$ 当 t 固定时关于 x 连续; 当 x 固定时关于 t 连续, 也不能保证 $f(x,t)$ 在 K 上有界.

例 6.14 在正方形 $\{(x,t)\,|0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 上, 若 $f(0,0) = 0, (x,t) \neq (0,0)$ 时, 定义函数 $f(x,t) = 2xt/(x^2+t^2)^2$, 则函数 $f(x,t)$ 关于 x 和 t 都连续. 但是由于 $f(t,t) = 1/2t^2$, 所以 $f(x,t)$ 无界. 此时 $f(x,0) = 0$, 所以 $F(0) = \int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x = 0$, 当 $t > 0$ 时

$$F(t) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}x = \frac{1}{t(t^2+1)},$$

并且 $F(t)$ 在 t=0 处不连续.

若 $f(x,t)$ 作为两个变量 x,t 的二元函数在 K 上连续, 则 $f(x,t)$ 在 K 上有界, 从而定理 6.19 的 (1) 和 (3) 都成立. 进而如果在 K 上存在偏导函数 $f_t(x,t)$, 使得当它作为二元函数时连续, 那么 (2) 也成立. 如果假定 $f(x,t)$ 或者 $f_t(x,t)$ 是两个变量 x,t 的二元连续函数, 那么通过对本节的 a) 相同的一致性收敛的讨论, 可以不用 Arzelà 定理也能证明定理 6.19[①]. 但在应用上, 在没有这样的限制之下证明定理

① 高木貞治《解析概論》, 参照 §48.

6.19 将更加方便. 这是因为, 给定的函数 $f(x,t)$ 或者其偏导函数 $f_t(x,t)$ 关于 x 和 t 都连续, 在应用时不经验证而承认这一事实.

设 $f(x,t)$ 是在矩形 $K=\{(x,t)\,|a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上有界且关于 x 和 y 连续的函数, 并且其积分

$$\Phi(u,t)=\int_a^u f(x,t)\mathrm{d}x,\quad a\leqslant u\leqslant b$$

是两个变量 u,t 的二元函数. 则有下面定理.

定理 6.20 (1) $\Phi(u,t)$ 是两个变量 u,t 的二元连续函数.

(2) 若存在偏导函数 $f_t(x,t)$, 使得 $f(x,t)$, $f_t(x,t)$ 都是两个变量 x,t 的二元连续函数, 则 $\Phi(u,t)$ 是关于两个变量 u,t 的二元连续可微函数, 并且其偏导函数为

$$\Phi_u(u,t)=f(u,t),\quad \Phi_t(u,t)=\int_a^u f_t(x,t)\mathrm{d}x.$$

证明 (1) 根据假设, 存在满足 $|f(x,t)|\leqslant M$ 的常数 M, 所以

$$|\Phi(u,t)-\Phi(c,t)|=\left|\int_c^u f(x,t)\mathrm{d}x\right|\leqslant M\,|u-c|.$$

因此, $\Phi(u,t)$ 关于 t 一致、关于 u 连续. 根据定理 6.19 的 (1), 显然 $\Phi(u,t)$ 关于 t 连续, 所以根据前面 a) 中开始叙述的结果, $\Phi(u,t)$ 是两个变量 u,t 的二元连续函数.

(2) $\Phi_u(u,t)=f(u,t)$ 是显然的. 所以根据假设, $\Phi_u(u,t)$ 是两个变量 u,t 的二元连续函数. 此外, 根据定理 6.19 的 (2), $\Phi_t(u,t)=\int_a^u f_t(x,t)\mathrm{d}x$. 因此根据 (1), $\Phi_t(u,t)$ 也是两个变量 u,t 的二元连续函数. □

例 6.15 为了对积分 $\int_0^1 x^t\mathrm{d}t$, $t>0$ 应用定理 6.19 的 (2), 我们令 $f(x,t)=x^t$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $t>0$, 然后讨论函数 $f(x,t)$ 和它的偏导函数 $f_t(x,t)$ 的性质. 幂函数 x^t 是定义在 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$ 上的关于 x 的函数 (2.3 节 b), 若定义 $f(0,t)=0^t=\lim\limits_{x\to+0}x^t=0$, 则 $f(x,t)$ 是关于 x 的连续函数. 显然 $f(x,t)$ 关于 t 是连续的并且 $0\leqslant f(x,t)\leqslant 1$. 当 $f_t(0,t)=0$, $0<x\leqslant 1$ 时, 根据 (3.20) 式,

$$f_t(x,t)=x^t\ln x.$$

若令 $y=1/x^t$, 则根据例 2.9,

$$\lim_{x\to+0}f_t(x,t)=-\frac{1}{t}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

因此 $f_t(x,t)$ 关于 x 连续, 从而若固定 t, 则 $f_t(x,t)$ 有界: $|f_t(x,t)|\leqslant M_t$. 显然 $f_t(x,t)$ 关于 t 连续, 并且当 $t\geqslant\alpha>0$ 时,

$$|f_t(x,t)|=x^t\,|\ln x|\leqslant x^\alpha\,|\ln x|\leqslant M_\alpha,$$

即对于任意的正实数 α, 当 $t \geqslant \alpha$ 时, $f_t(x,t)$ 有界. 所以根据定理 6.19 的 (2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 x^t \mathrm{d}x = \int_0^1 x^t \ln x \mathrm{d}x.$$

因为 $\displaystyle\int_0^1 x^t \mathrm{d}x = \frac{1}{t+1}$, 所以

$$\int_0^1 x^t \ln x \mathrm{d}x = \frac{-1}{(t+1)^2}.$$

将此等式两边都对 t 进行微分, 则 $(\partial/\partial t)(x^t \ln x) = x^t(\ln x)^2$ 关于 x, t 都连续, 并且因为当 $t \geqslant \alpha > 0$ 时有界, 所以

$$\int_0^1 x^t (\ln x)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{(t+1)^3}, \quad t > 0.$$

以下同理, 一般地有

$$\int_0^1 x^t (\ln x)^n \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(t+1)^{n+1}}, \quad t > 0.$$ □

5.4 节的定理 5.12 是 Arzelà 定理在广义积分情况下的推广. 与此相对应, Arzelà 定理引出的定理 6.19 也可以推广到广义积分的情况.

引理 6.2 设 $\sigma(x)(\sigma(x) \geqslant 0)$ 是区间 $(a, +\infty)$ 上的连续函数, 并且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sigma(x)\mathrm{d}x < +\infty$. 再设 $f(x,t)$ 是 $\{(x,t)\,|\,x > a,\ 0 < |t-c| < \rho\}$ 上满足不等式 $|f(x,t)| \leqslant \sigma(x)$ 的关于 x, t 的函数, 并且当 t 固定时关于 x 连续. 那么, 若极限 $f(x) = \lim\limits_{t\to c} f(x,t)$ 存在且关于 x 连续, 则

$$\lim_{t\to c}\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{6.51}$$

证明 此证明是用定理 5.12 代替 Arzelà 定理, 除此之外与引理 6.1 的证明完全相同. 即若假设 (6.51) 式不成立, 则对于某正实数 ε, 存在满足

$$0 < |t_n - c| < \frac{1}{n}, \quad \left|\int_a^{+\infty} f(x,t_n)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \geqslant \varepsilon$$

的数列 $\{t_n\}$, 若令 $f_n(x) = f(x,t_n)$, 则在区间 $(a,+\infty)$ 上恒有 $|f_n(x)| \leqslant \sigma(x)$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. 所以根据定理 5.12, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 这与假设矛盾. 这里 (6.51) 式的广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 从而 $|f(x,t)| \leqslant \sigma(x)$, 所以当 $|f(x)| \leqslant \sigma(x)$ 时, 显然有 $\displaystyle\int_a^{+\infty} \sigma(x)\mathrm{d}x < +\infty$. □

定理 6.21　设 $f(x,t)$ 是定义在 $\{(x,t)\,|\,x>a, \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上的 x,t 的函数, 当 t 固定时它关于 x 连续, 当 x 固定时它关于 t 连续, 并且存在区间 $(a,+\infty)$ 上的关于 x 的连续函数 $\sigma(x)$, 满足 $\sigma(x)\geqslant 0$ 时, $\int_a^{+\infty}\sigma(x)\mathrm{d}x<+\infty$ 且不等式 $|f(x,t)|\leqslant\sigma(x)$ 恒成立. 则

(1) $F(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 是关于 t 的连续函数.

(2) 设 $f(x,t)$ 关于 t 可偏微, 并且存在满足 $\int_a^{+\infty}\sigma_1(x)\mathrm{d}x<+\infty$, $\sigma_1(x)\geqslant 0$ 的关于 x 的连续函数 $\sigma_1(x)$, 使得 $|f_t(x,t)|\leqslant\sigma_1(x)$ 恒成立, 并且 t 固定时 $f_t(x,t)$ 关于 x 连续, 则 $F(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 关于 t 可微, 并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f_t(x,t)\mathrm{d}x. \tag{6.52}$$

(3)

$$\int_\alpha^\beta\mathrm{d}t\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t. \tag{6.53}$$

证明　(1) 根据引理 6.2, 对于任意的 c, $\alpha\leqslant c\leqslant\beta$,

$$\lim_{t\to c}\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{t\to c}f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,c)\mathrm{d}x.$$

从而 (1) 显然成立.

(2) 任取点 c, $\alpha\leqslant c\leqslant\beta$, 并且令

$$q(x,t)=\frac{f(x,t)-f(x,c)}{t-c},\quad t\neq c,$$

则根据中值定理,

$$q(x,t)=f_t(x,c+\theta(t-c)),\quad 0<\theta<1,$$

所以

$$|q(x,t)|=|f_t(x,c+\theta(t-c))|\leqslant\sigma_1(x).$$

此外, 当 t 固定时 $q(x,t)$ 关于 x 连续且 $\lim\limits_{t\to c}q(x,t)=f_t(x,c)$. 因此, 根据引理 6.2,

$$\lim_{t\to c}\frac{F(t)-F(c)}{t-c}=\lim_{t\to c}\int_a^{+\infty}q(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f_t(x,c)\mathrm{d}x,$$

即 $F(t)$ 在 $t=c$ 处可微且 $F'(c)=\int_a^{+\infty}f_t(x,c)\mathrm{d}x$.

(3) 令

$$g(x,t)=\int_\alpha^t f(x,u)\mathrm{d}u,\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

则 $|f(x,t)|\leqslant\sigma(x)$, 故 $|g(x,t)|\leqslant(\beta-\alpha)\sigma(x)$. 根据 (1), 函数 $g(x,t)$ 关于 x 连续. 因为 $g(x,t)$ 关于 t 连续可微且 $g_t(x,t)=f(x,t)$, 所以 $g_t(x,t)$ 关于 x 连续且 $|g_t(x,t)|\leqslant\sigma(x)$. 因此根据 (2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty}g(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}g_t(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

若两边关于 t 从 α 到 β 积分, 则

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,t)\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}t\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x.$$ □

定理 6.21 中将区间 $(a,+\infty)$ 换成任意的区间 I, 结论仍然成立.

例 6.16 考察例 4.8 中导入的 Γ 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x,\quad s>0,$$

此式右边的广义积分的收敛性已经在例 4.8 中证明. 因为当 $0<x<1$ 时, x^s 是关于 s 的单调递减函数; 当 $x>1$ 时, x^s 是关于 s 的单调递增函数, 所以将积分分为两部分, 写成

$$\Gamma(s)=F(s)+G(s),$$

$$F(s)=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x,\quad G(s)=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x.$$

任取实数 α,β, $0<\alpha<\beta$, 并且令 $\alpha\leqslant s\leqslant\beta$, 则

$$\text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时},\quad \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\leqslant e^{-x}x^{\beta-1},\quad \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{\beta-1}\mathrm{d}x<\Gamma(\beta),$$

所以根据定理 6.21 的 (1), $G(s)$ 是关于 s 的连续函数. 又因为

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}=\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln x=\mathrm{e}^{-x}x^s\frac{\ln x}{x},$$

所以

$$\text{当 } x\geqslant 1 \text{ 时},\quad 0\leqslant\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}.\tag{6.54}$$

这是因为, 若令 $\varphi(x)=\ln x/x$, 则 $\varphi(1)=0$; 当 $x>1$ 时 $\varphi(x)>0$, 并且导函数 $\varphi'(x)=(1-\ln x)/x^2$, 当 $1<x<\mathrm{e}$ 时为正; 当 $x>\mathrm{e}$ 时为负, 所以 $\varphi(x)$ 在 $x=\mathrm{e}$ 处有最大值 $\varphi(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}$. 因此, 当 $x\geqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-x-1}x^s\leqslant\mathrm{e}^{-x-1}x^\beta,\quad \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-1}x^\beta\mathrm{d}x<\frac{\Gamma(\beta+1)}{\mathrm{e}}.$$

从而根据定理 6.21 的 (2), $G(s)$ 可微, 并且

$$G'(s)=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln x\mathrm{d}x.$$

对于 $F(s)$, 因为

$$\text{当 } 0<x\leqslant 1 \text{ 时},\quad \mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\leqslant \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1},\quad \int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}\mathrm{d}x<\Gamma(\alpha),$$

所以 $F(s)$ 是关于 s 的连续函数. 对于任意给定的 ε, $0<\varepsilon<\alpha$, 当 $0<x\leqslant 1$ 时,

$$\left|\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln x\right|\leqslant \mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-1}\left|\ln x\right|=\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-\varepsilon-1}\cdot x^{\varepsilon}\left|\ln x\right|.$$

若令 $y=1/x^{\varepsilon}$, 则根据 (6.54) 式,

$$x^{\varepsilon}\left|\ln x\right|=\frac{\ln y}{\varepsilon y}\leqslant\frac{1}{\varepsilon\mathrm{e}}.$$

因此, 当 $0<x\leqslant 1$ 时,

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-\varepsilon-1}}{\varepsilon e},\quad \int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{\alpha-\varepsilon-1}\mathrm{d}x<\Gamma(\alpha-\varepsilon).$$

所以, $F(s)$ 可微, 并且

$$F'(s)=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln x\mathrm{d}x.$$

以上我们假定了 $\alpha\leqslant s\leqslant\beta$, 其中 α,β 为满足 $0<\alpha<\beta$ 的任意实数. 因此 $\Gamma(s)$ 是区间 $(0,+\infty)$ 上的可微函数, 并且

$$\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln x\mathrm{d}x,\quad s>0.$$

在积分号下对 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$ 微分可以得到导函数 $\Gamma'(s)$.

同理, $\Gamma(s)$ 的 n 阶导函数为

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}(\ln x)^n\mathrm{d}x,\quad s>0. \tag{6.55}$$

例 6.17 作为定理 6.21 的应用例子, 现阐述著名的积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的古典计算方法. 我们首先证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos(qx)\mathrm{d}x=\frac{p}{p^2+q^2},\quad p>0. \tag{6.56}$$

根据

$$\left|e^{-px}\cos(qx)\right| \leqslant e^{-px}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \frac{1}{p}$$

显然 (6.56) 式左侧的广义积分是绝对收敛的. 根据分部积分公式 (4.21) 式,

$$\int e^{-px}\cos(qx)dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\cos(qx) - \frac{q}{p}\int e^{-px}\sin(qx)dx,$$

$$\int e^{-px}\sin(qx)dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\sin(qx) + \frac{q}{p}\int e^{-px}\cos(qx)dx$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx)dx = \frac{1}{p} - \frac{q}{p}\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(qx)dx = \frac{1}{p} - \frac{q^2}{p^2}\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx)dx.$$

因此 (6.56) 式成立. 此外, 若固定 p, 则 $e^{-px}\cos(qx)$ 是关于 x 和 q 的连续函数, 并且 $|e^{-px}\cos(qx)| \leqslant e^{-px}$, $\int_0^{+\infty} e^{-px}dx < +\infty$, 所以根据定理 6.21 的 (3), (6.56) 式对 q 积分得,

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\left(\int_0^q \cos(qx)dq\right)dx = p\int_0^q \frac{dq}{p^2+q^2},$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin(qx)}{x}dx = \mathrm{Arc}\tan\frac{q}{p}.$$

若再次对 q 积分, 则

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{1-\cos(qx)}{x^2}dx = \int_0^q \mathrm{Arc}\tan\frac{q}{p}dq.$$

又根据 (4.23) 式,

$$\int \mathrm{Arc}\tan t\ dt = t\ \mathrm{Arc}\tan t - \int\frac{t\ dt}{t^2+1} = t\ \mathrm{Arc}\tan t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1),$$

所以

$$\int_0^q \mathrm{Arc}\tan\frac{q}{p}dq = q\mathrm{Arc}\tan\frac{q}{p} - \frac{p}{2}\ln\left(\frac{q^2}{p^2}+1\right).$$

因此, 若令 $q=1$, 则

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \mathrm{Arc}\tan\frac{1}{p} - \frac{p}{2}\ln(1+p^2) + p\ln p. \tag{6.57}$$

该等式是在 $p>0$ 的情况下证明的. 当 $p \geqslant 0$ 时,

$$\left|e^{-px}\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx < +\infty$$

所以根据定理 6.21 的 (1), 当 $p \geqslant 0$ 时左侧的积分是关于 p 的连续函数. 因为关于 x 的函数

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\cdots$$

在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且 $x>0$ 时, $0 \leqslant (1-\cos x)/x^2 \leqslant 2/x^2$, 所以根据 4.3 节定理 4.11 的 (2), 显然 $\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x<+\infty$. 因此对等式 (6.57) 取当 $p \to +0$ 时的极限得

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{6.58}$$

又根据分部积分公式,

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1-\cos x}{x}+\int\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{6.59}$$

6.4　n 元 函 数

6.1 节和 6.2 节中对二元函数的结果同样可以推广到 n 元函数上. 下面阐述其要点.

n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 是 n 个实数组 $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 的全体的集合, 并且 $\mathbf{R}^n$ 的点为 n 个实数组成的实数组 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(1.6 节 g)). 如果对于点集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 的每一个点 P, 分别有一个实数与之对应, 那么就称这种对应为定义在 D 上的函数 f. 通过对应 f, 与 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 所对应的实数 z 称为 f 在 P 处的值, 记为

$$z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

函数 f 用 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 来表示, 并且称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数. 函数的定义域、值域的含义与 6.1 节中叙述的平面上点集时相同, 当开集 $U(U\in\mathbf{R}^n)$ 不能表示为无共同点的两个非空集合的并集时, 称 U 为连通的, 并且称连通开集为领域, 领域的闭包为闭领域.

a) 函数的极限和连续性

6.1 节中的讨论适用于 n 元函数. 特别是与函数的收敛相关的 Cauchy 判别法 (定理 6.11), 与函数一致连续性相关的定理 6.2, 与连续函数的最大值和最小值相关的定理 6.3, 以及与定义在领域或闭领域上连续函数的值域相关的定理 6.4 和定理 6.5, 对 n 元函数仍然都成立. 此外, 如果 $f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P)$, $P=$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数, $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^m$ 上的关于 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 的连续函数, 并且对于所有的点 $P\in D$, $f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P)\in E$. 那么复合函数 $\varphi(f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P))$ 是定义在 D 上的关于 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的连续函数.

b) 偏微分

设 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数. 与 6.2 节 a) 中所述二元函数相同, 当固定 $x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_n$, 把 $f(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_n)$ 作为 x_j 的一元函数时, 若 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 可微, 则称 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 关于 x_j 可偏微, 称作为单变量 x_j 的函数时的 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 的微分系数为 n 元函数 $z=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 关于 x_j 的偏微分系数, 并且用 $\partial z/\partial x_j$, $f_{x_j}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 等符号表示. 例如

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=f_{x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h,x_2,\cdots,x_n)-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{h}.$$

如果 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 在 D 上的所有点处关于 x_j 可偏微, 就称 n 个变量 $x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n$ 的函数 $f_{x_j}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 为 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ 关于 x_j 的偏导函数. 从而也容易理解高阶偏导函数

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)=f_{x_kx_j}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k,\cdots,x_n),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_k}\right)=f_{x_kx_jx_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

等的含义.

c) 可微性

设 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义某领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数, 并且 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是属于 D 的点. 如果存在常数 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)=\sum_{j=1}^{n}A_j(x_j-a_j)+o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j-a_j)^2}\right)$$

成立, 那么称函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 处可微, 或者在点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 处关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可微. 如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(a_1,\cdots,a_n)$ 处可微, 那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(a_1,\cdots,a_n)$ 处关于每一个变量 x_j, $j=1,2,\cdots,n$ 都可偏微, 并且

$$A_j=f_{x_j}(a_1,\cdots,a_j,\cdots a_n).$$

将 $a_1,\cdots,a_n$ 用 $x_1,\cdots,x_n$, $x_1,\cdots,x_n$ 用 $x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n$ 来替换, 并且令 $\Delta z=f(x_1+\Delta x_1,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)$, 则上式可以改写成

$$\Delta z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \Delta x_j + o\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\Delta x_j)^2}\right).$$

定义 $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x_1, \cdots, x_n) \Delta x_j.$$

因为 x_j 的全微分为 $\mathrm{d}x_j = \Delta x_j$, 所以

$$\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j. \tag{6.60}$$

当函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在其定义域 D 的每一点处都可微时, 称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可微. 可微的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 连续且关于每一变量 $x_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 都可偏微.

以上我们假定了领域 D 是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域. 当领域 D 是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域的子集时, 函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 D 上连续、可微等蕴含将 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域限制到 D 而得到的函数 $f_D(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是连续函数、可微函数等.

如果二元函数 $f(x, y)$ 在领域 D 上偏导函数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ 存在且连续, 那么 $f(x, y)$ 在 D 上可微 (定理 6.6).

定理 6.22 如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在领域 D, $D \subset \mathbf{R}^n$ 上各偏导函数 $f_{x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n), j = 1, 2, \cdots, n$ 存在且连续, 那么 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 D 上可微.

证明与定理 6.6 的证明相同.

如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在领域 D 上的各偏导数 $f_{x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n), j = 1, 2, \cdots, n$ 存在且连续, 那么就称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 D 上连续可微. 根据定理 6.22, 连续可微的函数必可微.

d) 偏微分顺序

定理 6.23 如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的偏导函数 $f_{x_j}(x_1, \cdots, x_n), f_{x_k}(x_1, \cdots, x_n), f_{x_j x_k}(x_1, \cdots, x_n), f_{x_k x_j}(x_1, \cdots, x_n)$ 在领域 D 上存在且连续, 那么

$$f_{x_k x_j}(x_1, \cdots, x_j, \cdots x_k, \cdots x_n) = f_{x_j x_k}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_k, \cdots x_n).$$

证明 将 $x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 固定, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以看作是关于 x_j, x_k 的二元函数, 从而这个定理可以归结到定理 6.7. □

定理 6.24 如果函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在领域 D 上关于 x_j, x_k 可偏微, 并且偏导函数 $f_{x_j}(x_1, \cdots, x_n), f_{x_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 可微, 那么

$$f_{x_k x_j}(x_1, \cdots, x_j, \cdots x_k, \cdots x_n) = f_{x_j x_k}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_k, \cdots x_n).$$

这个定理可归结到 Young 定理 (定理 6.8).

e) **函数的类**

函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在领域 D 上 m 阶可微, 或者 m 阶连续可微的含义是显然的. 当定义在领域 D 上的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上 m 阶连续可微时, 称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 D 上任意阶连续可微时, 称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

定义在领域 D 上的函数 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 m 阶可微时, 根据定理 6.24, 其直至 m 阶的偏导函数

$$\frac{\partial^q z}{\partial x_i\partial x_j\cdots\partial x_k}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\cdots\frac{\partial}{\partial x_k}}_{q\text{个}}z,\quad q\leqslant m,$$

与偏微分 $\partial/\partial x_i,\partial/\partial x_j,\cdots,\partial/\partial x_k$ 的顺序无关. 因此, 直至 m 阶为止的偏导函数都可写成

$$\frac{\partial^{q_1+q_2+\cdots+q_n}z}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\cdots\partial x_n^{q_n}},\quad q_1+q_2+\cdots+q_n\leqslant m.$$

f) **复合函数**

设 $z=g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 是定义在领域 $E\subset\mathbf{R}^m$ 上的关于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的函数, $y_k=f_k(P)=f_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $k=1,2,\cdots,m$ 是定义在领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的关于 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数. 当 $P\in D$, $(f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P))\in D$ 时, 我们讨论复合函数 $z=g(f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P))$.

定理 6.25 如果函数 $z=g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 关于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 可微, 并且 $y_k=f_k(x_1,\cdots,x_n)$, $k=1,2,\cdots,m$ 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可微, 那么复合函数 $z=g(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 可微, 并且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}+\frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}. \tag{6.61}$$

证明与定理 6.3 的证明相同.

推论 如果函数 $z=g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 关于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 连续可微, $y_k=f_k(x_1,\cdots,x_n),k=1,2,\cdots,m$, 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 连续可微, 那么复合函数 $z=g(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的连续可微函数.

定理 6.26 如果 $z=g(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 关于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 是 ν 阶连续可微的, $y_k=f_k(x_1,\cdots,x_n),k=1,2,\cdots,m$, 关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 ν 阶连续可微的, 那么复合函数 $z=g(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 ν 阶连续可微函数.

证明 证明与定理 6.14 相同, 可以通过对 ν 使用归纳法来证明. □

推论 如果 $z=g(y_1,\cdots,y_m)$ 是关于 $y_1,\cdots,y_m$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, $y_k=f_k(x_1,\cdots,x_n)$, $k=1,2,\cdots,m$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 那么复合函数 $z=g(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

g) Taylor 公式

二元函数的 Taylor 公式 (6.30) 也可以推广到 n 元函数的情况. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 m 阶连续可微函数, 并且 $A=(a_1,\cdots,a_n)\in D$, $D_A=\{P\in D|AP\subset D\}$. 为方便起见, 令

$$f^{(m_1,\cdots,m_n)}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}f(x_1,\cdots,x_n),$$

则当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D_A$ 时,

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{m_1+\cdots+m_n\leqslant m-1}c_{m_1\cdots m_n}(x_1-a_1)^{m_1}\cdots(x_n-a_n)^{m_n}+R_m,$$

$$c_{m_1\cdots m_n}=\frac{f^{(m_1,\cdots,m_n)}(a_1,\cdots,a_n)}{m_1!m_2!\cdots m_n!},$$

$$R_m=\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\frac{f^{(m_1,\cdots,m_n)}(\xi_1,\cdots,\xi_n)}{m_1!m_2!\cdots m_n!}(x_1-a_1)^{m_1}\cdots(x_n-a_n)^{m_n},$$

$$\xi_1=a_1+\theta(x_1-a_1),\cdots,\xi_n=a_n+\theta(x_n-a_n),\quad 0<\theta<1.$$

这就是 Taylor 公式.

当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 D 上的 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数时, 对于所有的自然数 m, Taylor 公式都成立. 所以, 若不考虑收敛, 则 "Taylor 级数" 可写成

$$\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1m_2\cdots m_n}(x_1-a_1)^{m_1}(x_2-a_2)^{m_2}\cdots(x_n-a_n)^{m_n}.$$

n 个变量 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的幂级数

$$\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1m_2\cdots m_n}t_1^{m_1}t_2^{m_2}\cdots t_n^{m_n}$$

的绝对收敛性是显然的. 与 6.2 节 g) 中叙述的二元幂级数情况相同, 若对于 $\tau_1>0,\tau_2>0,\cdots,\tau_n>0$, n 重数列

$$\{c_{m_1m_2\cdots m_n}\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_n^{m_n}\}$$

有界, 则当 $|x_1-a_1|<\tau_1,|x_2-a_2|<\tau_2,\cdots,|x_n-a_n|<\tau_n$ 时, 幂级数

$$\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1m_2\cdots m_n}(x_1-a_1)^{m_1}(x_2-a_2)^{m_2}\cdots(x_n-a_n)^{m_n}\tag{6.62}$$

绝对收敛. 对于满足 $\{c_{m_1m_2\cdots m_n}\tau_1^{m_1}\tau_2^{m_2}\cdots\tau_n^{m_n}\}$ 有界的所有的 $\tau_1>0,\tau_2>0,\cdots,\tau_n>0$, 称并集

$$G=\cup\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,||x_1-a_1|<\tau_1,\cdots,|x_n-a_n|<\tau_n\}$$

为幂级数 (6.62) 式的收敛域. G 是非空集合时, 在点 $A=(a_1,\cdots,a_n)$ 的某个邻域 $W\subset G\cap D_A$ 处, 若当 $m\to\infty$ 时, 恒有 $R_m\to 0$, 则 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可以表示为 W 上绝对收敛的幂级数的和

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{m_1,\cdots,m_n=0}^{\infty}c_{m_1m_2\cdots m_n}(x_1-a_1)^{m_1}\cdots(x_n-a_n)^{m_n}. \tag{6.63}$$

称此式右边的幂级数为以点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为中心的 Taylor 级数, 或者称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为以点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为中心的 Taylor 展开, 当 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 表示为 (6.63) 式的形式时, 称函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 展成以点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为中心的 Taylor 级数. 定义在领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$, 如果在属于 D 的每一点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的某邻域上能够展成以 $(a_1,\cdots,a_n)$ 为中心的 Taylor 级数, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的**实解析函数**.

习　题

45. 证明当 $f(0,0)=0$, $(x,y)\neq 0$ 时, 关于 x,y 的二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ 在平面上处处连续, 并且关于 x,y 都可偏微, 但是在原点 $(0,0)$ 处不可微 (三村征雄《微分積分学》,p.237, 习题 4).

46. 设 $f(x,y)$ 是平面领域 D 上的关于 x,y 的二元可微函数. 试证: 若在点 $(x_0,y_0)\in D$ 处, $f(x,y)$ 取得最大值或者最小值, 则 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$.

47. 求在全平面上定义的关于 x,y 的二元函数 $\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 的最大值和最小值.

48. 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$ 的值 (试对 (6.58) 式进行变形).

49. 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ (n 是自然数) 的值 (对 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+t}=\frac{\pi}{2\sqrt{t}}$, $t>0$ 的两边关于 t 进行 $n-1$ 次微分).

50. 求积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

51. 证明: 当函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续且有界时,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin^2(tx)}{tx^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0)$$

第 7 章　积分法则 (多元)

7.1　积　　分

首先叙述二元函数的积分.

a) 积分的定义

当 I, J 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的区间时, 称直积 $I \times J = \{(x,y)|x \in I, y \in J\}$ 为 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$**上的区间**. 当 $I = [a,b], J = [c,d]$ 是闭区间时, 称

$$K = I \times J = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

为平面 $\mathbf{R}^2$**上的闭区间**. 在本章中, 为方便起见又称闭区间 K 为**矩形**. 即本章中约定平面 $\mathbf{R}^2$ 上的矩形是指其边与坐标轴平行的矩形.

若 $f(x,y)$ 在矩形 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上是关于变量 x, y 的二元函数, 则在 K 上 $f(x,y)$ 的定积分的定义方法与单变量连续函数 $f(x)$ 的定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的定义方法是相同的. 即若将区间 $I = [a,b], J = [c,d]$ 分别用分点 $x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{j-1} < x_j < \cdots < x_{m-1} < b$, $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$, $c < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k < \cdots < y_{n-1} < d$, 分割成 m 个区间 $I_j = [x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, \cdots, m$ 和 n 个区间 $J_k = [y_{k-1}, y_k], k = 1, 2, \cdots, n$, 则矩形 $K = I \times J$ 被分割为 mn 个小矩形:

$$K_{jk} = I_j \times J_k = \{(x,y)|x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, y_{k-1} \leqslant y \leqslant y_k\},$$
$$j = 1, 2, \cdots, m, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $x_0 = a$, $x_m = b, y_0 = c, y_n = d$. 点集 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ 和 $\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$ 组成的对用

$$\Delta = (\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}, \{y_0, y_1, \cdots, y_n\})$$

表示, 并称此分割为矩形 K 的分割 Δ. 对于 K 的分割 Δ, 在每一个小矩形 K_{jk} 中任意选取一点 $P_{jk} = (\xi_{jk}, \eta_{jk}), x_{j-1} \leqslant \xi_{jk} \leqslant x_j, y_{k-1} \leqslant \eta_{jk} \leqslant y_k$, 并且令

$$\sigma_\Delta = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{jk}, \eta_{jk})(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

显然 $(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$ 是小矩形 K_{jk} 的面积. 小矩形 K_{jk} 的直径的最大值用

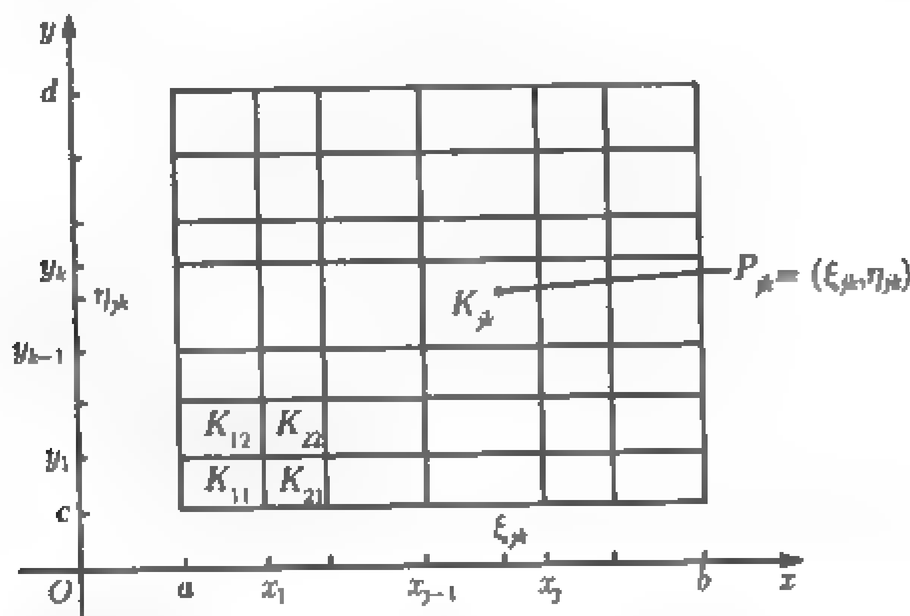
$$\delta[\Delta] = \max_{j,k} \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

表示. 则当 $\delta[\Delta] \to 0$ 时, 存在 σ_Δ 的极限

$$s = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \sigma_\Delta,$$

即存在实数 s, 使得对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 只要 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$, 那么无论 K 的分割 Δ 与点 $P_{jk} = (\xi_{jk}, \eta_{jk})$ 如何选取, 都有

$$|\sigma_\Delta - s| < \varepsilon.$$



[证明] 证明过程与前文对一元函数的证明相同. 根据定理 6.3, $f(x,y)$ 在每一个矩形 K_{jk} 上都具有最大值 M_{jk} 和最小值 μ_{jk}. 令

$$S_\Delta = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

$$s_\Delta = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \mu_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}),$$

则

$$\mu_{jk} \leqslant f(\xi_{jk}, \eta_{jk}) \leqslant \mathrm{M}_{jk},$$

所以

$$s_\Delta \leqslant \sigma_\Delta \leqslant S_\Delta. \tag{7.1}$$

另一方面, 根据定理 6.2, $f(x,y)$ 在 K 上一致连续, 即对于任意正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得对于属于 K 的两点 (x,y) 和 (x',y'),

$$\text{若 } \sqrt{(x-x')^2 + (x-y')^2} < \delta(\varepsilon), \quad \text{则} \quad |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon.$$

所以, 只要 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$, 就有 $\mathsf{M}_{jk} - \mu_{jk} < \varepsilon$. 因此小矩形 K_{jk} 的面积 $(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$ 的总和与 K 的面积 $(b-a)(d-c)$ 相等, 从而

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) = \varepsilon(b-a)(d-c).$$

若将 $\delta(\varepsilon/(b-a)(d-c))$ 改写成 $\delta(\varepsilon)$, 则

$$\text{只要 } \delta[\Delta] < \delta(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon \text{ 成立.} \tag{7.2}$$

对于矩形 K 的任意分割 $\Delta' = (\{x'_0, x'_1, \cdots, x'_h\}, \{y'_0, y'_1, \cdots, y'_l\})$, 将 Δ 和 Δ' 的分点合并得到 K 的分割, 即由

$$\{x''_0, x''_1, \cdots, x''_p\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\} \cup \{x'_0, x'_1, \cdots, x'_h\},$$

$$\{y''_0, y''_1, \cdots, y''_q\} = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \cup \{y'_0, y'_1, \cdots, y'_l\}$$

得到 K 的分割为

$$\Delta'' = (\{x''_0, x''_1, \cdots, x''_p\}, \{y''_0, y''_1, \cdots, y''_q\}),$$

并且任意取点 $(\xi''_{\lambda\nu}, \eta''_{\lambda\nu}), x''_{\lambda-1} \leqslant \xi''_{\lambda\nu} \leqslant x''_\lambda, y''_{\nu-1} \leqslant \eta''_{\lambda\nu} \leqslant y''_\nu$, 令

$$\sigma_{\Delta''} = \sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} f(\xi''_{\lambda\nu}, \eta''_{\lambda\nu})(x''_\lambda - x''_{\lambda-1})(y''_\nu - y''_{\nu-1}).$$

假设 $x_{j-1} = x''_\rho, x_j = x''_\sigma, y_{k-1} = y''_k, y_k = y''_\tau$, 则小矩形 K_{jk} 在分割 Δ'' 之下被分割成 $(\sigma - \rho)(\tau - k)$ 个小矩形 $K''_{\lambda\nu}, \lambda = \rho+1, \rho+2, \cdots, \sigma,\ \nu = \kappa+1, \kappa+2, \cdots, \tau$ 且 $\mu_{jk} \leqslant f(\xi''_{\lambda\nu}, \eta''_{\lambda\nu})$. 所以

$$\mu_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \leqslant \sum_{\lambda=\rho+1}^{\sigma} \sum_{\nu=\kappa+1}^{\tau} f(\xi''_{\lambda\nu}, \eta''_{\lambda\nu})(x''_\lambda - x''_{\lambda-1})(y''_\nu - y''_{\nu-1}).$$

因此

$$s_\Delta \leqslant \sigma_{\Delta''},$$

同理

$$\sigma_{\Delta''} \leqslant S_{\Delta'}.$$

所以

$$s_\Delta \leqslant S_{\Delta'}.$$

因此, 若考虑矩形 K 所有的分割, 则可以确定对应于 s_Δ 的全体集合的上确界

$$s = \sup_\Delta s_\Delta.$$

显然 $s \leqslant S_{\Delta'}$, 又因为 Δ' 是任意的分割, 所以

$$s_\Delta \leqslant s \leqslant S_\Delta.$$

因此, 根据 (7.1) 式和 (7.2) 式, 当 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$ 时, 就有 $|\sigma_\Delta - s| < \varepsilon$. □

定义 7.1 称 $s = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \sigma_\Delta$ 为矩形 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上的函数 $f(x,y)$ 的积分, 或者函数 $f(x,y)$ 在 K 上的积分, 用符号 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示:

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}). \tag{7.3}$$

求解积分 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的过程称为在 K 上对 $f(x,y)$ 积分. 积分 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 又可以用符号 $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 来表示:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{jk},\eta_{jk})(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}).$$

此式左边的这种形式称为**二重积分**(double integral). $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 上的变量 x, y 称为积分变量, 这与一元函数的定积分的情况相同. 若令 $f(\xi_{jk},\eta_{jk}) = f(P_{jk})$, $P_{jk} = (\xi_{jk},\eta_{jk})$, $\omega_{jk} = (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$, 则 (7.3) 式可写成

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k-1}^{n} f(P_{jk})\omega_{jk}. \tag{7.4}$$

采用这种记法, 若令 $f(P) = f(x,y)$, $P = (x,y)$, 则积分 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以简记为 $\int_K f(P)\mathrm{d}\omega$.

b) 积分的性质

下面的定理与描述一元函数定积分性质的定理 4.1 类似.

定理 7.1 设 $f(P) = f(x,y), g(P) = g(x,y) (P = (x,y))$ 是定义在矩形 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上的连续函数.

(1) 设 $a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_h<\cdots<\alpha_p=b, c=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_i<\cdots<\gamma_q=d$, 并且若将 K 分割成 pq 个小矩形

$$K_{hi}=\{(x,y)|\alpha_{h-1}\leqslant x\leqslant\alpha_h,\gamma_{i-1}\leqslant y\leqslant\gamma_i\},\ h=1,2,\cdots,p,\ i=1,2,\cdots,q,$$

则有

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{h=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\int_{K_{hi}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.5}$$

(2) 当 c_1,c_2 为任意常数时,

$$\int_K(c_1f(P)+c_2g(P))\mathrm{d}\omega=c_1\int_K f(P)\mathrm{d}\omega+c_2\int_K g(P)\mathrm{d}\omega. \tag{7.6}$$

(3) 在矩形 K 上若恒有 $f(x,y)\geqslant g(x,y)$,

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\int_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并且除去 K 上 $f(x,y)=g(x,y)$ 的情况外,

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\int_K g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4)

$$\left|\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_K|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.7}$$

证明 (1) 在积分定义 7.1 中, 选取分割 Δ 为 $\alpha_h\in\{x_0,x_1,\cdots,x_m\},\gamma_i\in\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$, 并令 $\alpha_h=x_{j(h)},\gamma_i=y_{k(i)}$, 则若采用 (7.4) 式的记法, 则

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}f(P_{jk})\omega_{jk}=\sum_{h=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=j(h-1)+1}^{j(h)}\sum_{k=k(i-1)+1}^{k(i)}f(P_{jk})\omega_{jk}.$$

在此式两边, 若当 $\delta[\Delta]\to 0$ 时取极限, 则可直接获得 (7.5) 式.

(2)、(3)、(4) 和定理 4.1 的 (2)、(3)、(4)、(5) 的证明过程相同. □

(7.5) 又可改写成

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{h=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\int_{\alpha_{h-1}}^{\alpha_h}\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

一般地, 对于点集 $S\subset\mathbf{R}^n$, S 的开核, 即 S 的内点全体组成的集合用 (S) 来表示[①]. 例如, 矩形 $K=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 的开核 $(K)=\{(x,y)|a<$

① 开核的表示没有统一的符号, 此处采用高木贞治《解析概论》的记法, 用 ( ) 来表示. 这与表示开区间的符号 (a,b) 类似.

$x < b, c < y < d\}$. 如果矩形 K 可以用任意两个都没有公共内点的有限个矩形 K_λ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$ 的并集

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\lambda \cup \cdots \cup K_\nu, \quad (K_\lambda) \cap (K_\rho) = \varnothing \quad (\lambda \neq \rho)$$

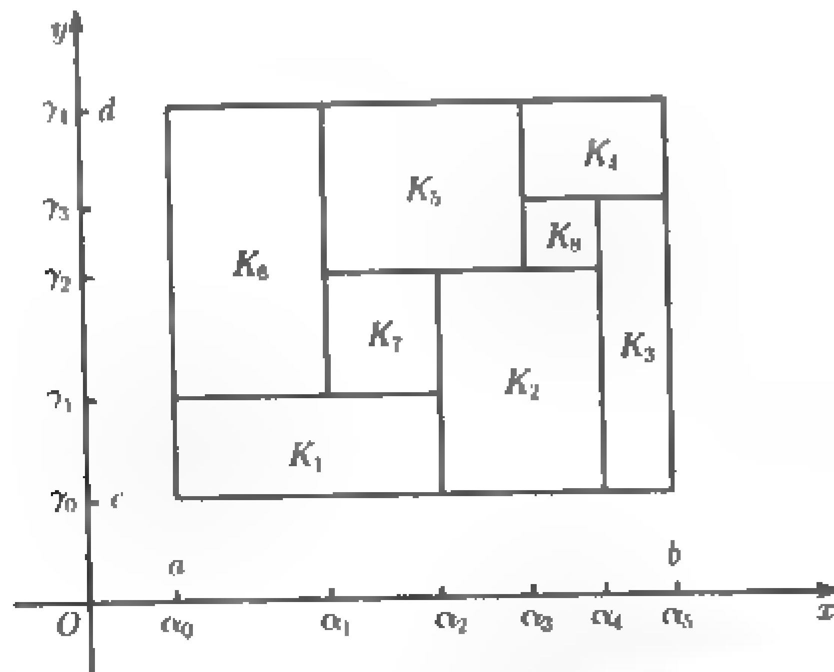
表示, 那么就称 K 被分割成有限个矩形 $K_1, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$. 定理 7.1 的 (1) 中, K 被分割成 pq 个矩形 K_{hi} 就是其中一例.

定理 7.2 设 $f(x,y)$ 在矩形 $K = \{(x,y) | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上连续, 则当 K 被分割成 ν 个矩形 $K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$ 时, 就有

$$\int_K f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{K_\lambda} f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.8}$$

证明 取 $K_\lambda = \{(x,y) | a_\lambda \leqslant x \leqslant b_\lambda, c_\lambda \leqslant y \leqslant d_\lambda\}$, 并且设实数 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_\lambda, b_\lambda, \cdots, a_\nu, d_\nu$ 中将互异的项按从小到大的顺序排列而得到的有限数列为 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_h, \cdots, \alpha_p$; 实数 $c_1, d_1, \cdots, c_\lambda, d_\lambda, \cdots, c_\nu, d_\nu$ 中将互异的项按从小到大的顺序排列而得到的有限数列为 $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_i, \cdots, \gamma_q$. 则显然有 $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p = b, c = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_q = d$. 令

$$K_{hi} = \{(x,y) | \alpha_{h-1} \leqslant x \leqslant \alpha_h, \gamma_{i-1} \leqslant y \leqslant \gamma_i\}.$$



若 $a_\lambda = \alpha_{k(\lambda)}$, $b_\lambda = \alpha_{h(\lambda)}$, $c_\lambda = \gamma_{j(\lambda)}$, $d_\lambda = \gamma_{i(\lambda)}$, 则矩形 K_λ 被分割成 $(h(\lambda) - k(\lambda))(i(\lambda) - j(\lambda))$ 个小矩形 K_{hi}, $h = k(\lambda)+1, \cdots, h(\lambda), i = j(\lambda)+1, \cdots, i(\lambda)$. (参考上图, 例如, 若 $a_2 = \alpha_2, b_2 = \alpha_4, c_2 = \gamma_0, d_2 = \gamma_2$, 则 K_2 被分割成 4 个矩形 $K_{31}, K_{41}, K_{32}, K_{42}$.) 因此, 根据定理 7.1 的 (1),

$$\int_{K_\lambda} f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{h=k(\lambda)+1}^{h(\lambda)} \sum_{i=j(\lambda)+1}^{i(\lambda)} \int_{K_{hi}} f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.9}$$

若首先将 K 分割成 ν 个矩形 K_λ, $\lambda=1,2,\cdots,\nu$, 然后将每一个 K_λ 分割成小矩形 K_{hi}, $h=k(\lambda)+1,\cdots,h(\lambda)$, $i=j(\lambda)+1,\cdots,i(\lambda)$, 则 K 最终被分割成 pq 个小矩形 K_{hi}, $h=1,2,\cdots,p,k=1,2,\cdots,q$. 因此, 根据 (7.5) 式和 (7.9) 式,

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{K_\lambda}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{h=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\int_{K_{hi}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \square$$

c) 累次积分

若两个变量 x,y 的二元函数 $f(x,y)$ 在矩形 $K=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上连续, 则根据定理 6.19 的 (1), $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,d]$ 上是关于 y 的连续函数, 从而定积分

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

存在.

定理 7.3

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{7.10}$$

证明　考虑矩形 K 的任意分割 $\Delta=(\{x_0,x_1,\cdots,x_m\},\{y_0,y_1,\cdots,y_n\})$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$. 虽然有

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,$$

但是由于 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 y 的连续函数, 所以根据中值定理 (定理 4.2), 存在 η_k 满足

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,\eta_k)\mathrm{d}x\cdot(y_k-y_{k-1}),y_{k-1}<\eta_k<y_k,$$

因此

$$\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_a^b f(x,\eta_k)\mathrm{d}x\cdot(y_k-y_{k-1}).$$

同理, 根据中值定理, 存在 ξ_{jk} 满足

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j}f(x,\eta_k)\mathrm{d}x=f(\xi_{jk},\eta_k)(x_j-x_{j-1}),\quad x_{j-1}<\xi_{jk}<x_j,$$

所以

$$\int_a^b f(x,\eta_k)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{m}f(\xi_{jk},\eta_k)(x_j-x_{j-1}).$$

因此,

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(\xi_{jk},\eta_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}).$$

当 $\delta[\Delta] \to 0$ 时, 对该等式取极限, 可得

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$ □

定理 7.3 表明了二重积分就是一元函数积分的反复应用, 称 $\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 形式的积分为**累次积分**(repeated integral). 将 x 和 y 进行替换, 则

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y, \tag{7.11}$$

所以

$$\int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

这就是等式 (6.50) 式.

对于矩形 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上的连续函数 $f(x,y)$, 现讨论 x,y 的函数

$$F(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad a < x \leqslant b, c < y \leqslant d.$$

根据 (7.10) 式,

$$F(x,y) = \int_c^y \mathrm{d}y \int_a^x f(x,y)\mathrm{d}x,$$

因此 $F(x,y)$ 是定义在 K 上的函数, 并且 $F(a,y) = F(x,c) = 0$. 将积分变量 x, y 用 t, u 替换, 则

$$F(x,y) = \int_c^y \mathrm{d}u \int_a^x f(t,u)\mathrm{d}t.$$

根据定理 6.20 的 (1),

$$\Phi(x,u) = \int_a^x f(t,u)\mathrm{d}t$$

是两个变量 x,u 的二元连续函数. 由于偏导函数 $\Phi_x(x,u) = f(x,u)$ 显然也是两个变量 x,u 的二元连续函数, 所以根据定理 6.20 的 (2),

$$F(x,y) = \int_c^y \Phi(x,u)du$$

是关于 x, y 的二元连续可微函数, 并且

$$F_y(x,y) = \Phi(x,y) = \int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t,$$
$$F_x(x,y) = \int_c^y \Phi_x(x,u)\mathrm{d}u = \int_c^y f(x,u)\mathrm{d}u.$$

因此存在偏导函数 $F_{yx}(x,y)$ 和 $F_{xy}(x,y)$, 并且

$$F_{yx}(x,y) = F_{xy}(x,y) = f(x,y). \tag{7.12}$$

若将 $F(x,y)$ 类似于单变量连续函数 $f(x)$ 的不定积分 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 考虑, 则 (7.12) 式类似于 $F'(x) = f(x)$. 反之, 在单变量情况时, 若函数 $F(x)$ 关于 x 可微, 并且 $F'(x) = f(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (微积分的基本公式 (4.15) 式). 与此相对应有下面的类似结论成立.

定理 7.4[①] 设 $f(x,y)$ 是矩形 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 上的连续函数. 那么若 K 上 $F(x,y)$ 的偏导函数 $F_y(x,y), F_{yx}(x,y)$ 存在且连续, 并且

$$F_{yx}(x,y) = f(x,y), \tag{7.13}$$

则

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c). \tag{7.14}$$

证明 令

$$F_0(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并且若取差

$$G(x,y) = F(x,y) - F_0(x,y),$$

则其在 K 上偏导函数 $G_y(x,y), G_{yx}(x,y)$ 存在且连续, 并且根据 (7.12) 式和 (7.13) 式,

$$G_{yx}(x,y) = 0.$$

因此 $G_y(x,y)$ 是不依赖于 x 的、仅与 y 有关的连续函数: $G_y(x,y) = \beta(y)$. 若令 $B(y) = \int_c^y \beta(y)\mathrm{d}y$, 则

$$\frac{\partial}{\partial y}(G(x,y) - B(y)) = 0.$$

① 龟谷俊司《解析入门》, p.303, 例 3.

因此, $G(x,y)-B(y)$ 是不依赖于 y 的、仅与 x 有关的连续函数 $A(x)$. 即

$$G(x,y)=A(x)+B(y),$$

所以

$$F(x,y)=F_0(x,y)+A(x)+B(y).$$

因此, $F_0(b,c)=F_0(a,d)=F_0(a,c)=0$, 从而

$$F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)=F_0(b,d).$$ □

注 定理 7.4 表明对于二元连续函数 $f(x,y)$, (7.13) 式中的函数 $F(x,y)$ 与单变量连续函数 $f(x)$ 的不定积分 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$ 相类似, 但是并不称 $F(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的不定积分. 因为不考虑二元函数的不定积分, 所以当然没有必要特别地将 $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为定积分, 因此我们将 $\int_a^b\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 单纯地称为积分.

在 (7.14) 中, 若将 b,d 用 x,y 替换, 则

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+F(x,c)+F(a,y)-F(a,c). \tag{7.15}$$

在定理 7.4 中我们没有假定偏导函数 $F_x(x,y)$ 存在, 但是若假定 $F_x(x,y)$ 存在, 则根据 Schwarz 定理 (定理 6.9), $F_{xy}(x,y)$ 存在且 $F_{xy}(x,y)=F_{yx}(x,y)$. 这可以根据 (7.15) 式直接推出. 事实上, 对于 $F_0(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 根据上述结果, $F_{0x}(x,y)$, $F_{0xy}(x,y)$ 存在且 $F_{0xy}(x,y)=f(x,y)$. 所以

$$F_x(x,y)=F_{0x}(x,y)+F_x(x,c),$$

因此

$$F_{xy}(x,y)=f(x,y)=F_{yx}(x,y).$$

d) 矩形块上的积分

称平面 $\mathbf{R}^2$ 上的有限个矩形的并集为矩形块[①].

引理 7.1 如果对于给定的 $\mathbf{R}^2$ 上的有限个矩形 $K_\lambda=\{(x,y)|a_\lambda\leqslant x\leqslant b_\lambda,c_\lambda\leqslant y\leqslant d_\lambda\}$, 选取矩形 $K=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 和它的分割 $\Delta=(\{x_0,x_1,\cdots,x_m\},\{y_0,y_1,\cdots,y_n\})$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$, 使得 $a_\lambda,b_\lambda\in\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$, $c_\lambda,d_\lambda\in\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$, 那么每个矩形 K_λ 是包含在 K_λ 中的小矩形 $K_{jk}=\{(x,y)|x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k\}$ 的并集:

① 高木貞治《解析概論》, p.422.

$$K_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset K_\lambda} K_{jk}.$$

证明 根据假设 $a_\lambda = x_{i(\lambda)}$, $b_\lambda = x_{j(\lambda)}$, $c_\lambda = y_{h(\lambda)}$, $d_\lambda = y_{k(\lambda)}$, 所以

$$K_\lambda = \bigcup_{j=i(\lambda)+1}^{j(\lambda)} \bigcup_{k=h(\lambda)+1}^{k(\lambda)} K_{jk} = \bigcup_{K_{jk} \subset K_\lambda} K_{jk}. \qquad \square$$

矩形块可以表示成任意两个都没有公共内点的有限个矩形的并集. [证明] 对于给定的矩形块 $A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda$($K_\lambda$ 是矩形), 根据引理 7.1,

$$K_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset K_\lambda} K_{jk},$$

因此,

$$A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset A} K_{jk}.$$

显然 K_{jk} 和 K_{ih}, $(i,h) \neq (j,k)$, 没有公共的内点. $\square$

如果矩形块 A 是任意两个都没有公共内点的矩形 K_λ, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$ 的并集

$$A = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\lambda \cup \cdots \cup K_\nu, \quad (K_\lambda) \cap (K_\rho) = \varnothing \quad (\lambda \neq \rho),$$

那么就称 A **被分割成有限个矩形**$K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$. 假设函数 $f(x,y)$ 在矩形块 A 上连续. 此时, 若将 A 分割成有限个矩形 K_λ, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$, 并且令

$$\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{K_\lambda} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则 σ 仅由 A 确定, 并且与 A 分割成矩形 K_λ 的分割方法无关. [证明] 设 $L_1, L_2, \cdots, L_\mu$ 是用另外的分割方法将 A 分割成有限个矩形, 并且对于矩形 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu, L_1, L_2, \cdots, L_\mu$ 应用引理 7.1, 则

$$K_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset K_\lambda} K_{jk}, \quad L_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset L_\lambda} K_{jk}.$$

因此, 根据定理 7.2,

$$\int_{K_\lambda} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{K_{jk} \subset K_\lambda} \int_{K_{jk}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

虽然 $A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda = \bigcup_{K_{jk} \subset A} K_{jk}$, 但是 K_λ 和 $K_\rho(\lambda \neq \rho)$ 没有公共的内点, 所以对于每一个 $K_{jk} \subset A$, 存在唯一的 K_λ 使得 $K_{jk} \subset K_\lambda$. 因此

$$\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{K_{jk} \subset K_\lambda} \int_{K_{jk}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{K_{jk} \subset A} \int_{K_{jk}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将右边的 $K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$ 换成 $L_1, L_2, \cdots, L_\lambda, \cdots, L_\mu$, 此等式不变. 即 σ 仅由 A 确定. □

定义 7.2 称 σ 是 A 上 $f(x,y)$ 的积分, 或者 $f(x,y)$ 在 A 上的积分, 记为 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$:

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{K_\lambda} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda, (K_\lambda) \cap (K_\rho) = \varnothing \quad (\lambda \neq \rho). \tag{7.16}$$

当 $f(P) = f(x,y), P = (x,y)$ 时, 积分 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 记为 $\int_A f(P)\mathrm{d}\omega$ 等.

定理 7.5 设 $f(P) = f(x,y), g(P) = g(x,y)(P = (x,y))$ 是矩形块 A 上的连续函数.

(1) 如果 A 是没有公共内点的两个矩形块 B, E 的并集: $A = B \cup E, (B) \cap (E) = \varnothing$, 那么

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.17}$$

(2) 当 c_1, c_2 是任意的实数时,

$$\int_A (c_1 f(P) + c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1 \int_A f(P)\mathrm{d}\omega + c_2 \int_A g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(3) 在矩形块 A 上, 若恒有 $f(x,y) \geqslant g(x,y)$, 则

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \int_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并且除去 A 上 $f(x,y) = g(x,y)$ 的情况,

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > \int_A g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4)

$$\left|\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_A |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.18}$$

(5) 若矩形块 B 包含于 A: $B \subset A$, 则

$$\int_B |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \int_A |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{7.19}$$

$$\left|\int_A f(P)\mathrm{d}\omega - \int_B f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_B |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.20}$$

证明　(1) 若将 B, E 分别分割成有限个矩形, 并且用 $B = \bigcup_{\lambda=1}^{\mu} K_\lambda, E = \bigcup_{\lambda=\mu+1}^{\nu} K_\lambda$ 表示, 则因为 $(B)\cap(E)=\varnothing$, 我们有 $A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda, (K_\lambda)\cap(K_\rho)=\varnothing(\lambda\neq\rho)$. 因此, 根据定义 7.2, 可直接获得 (7.17) 式.

(2)、(3)、(4) 根据定理 7.1 的 (2)、(3)、(4) 显然成立.

(5) 令 $A = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} K_\lambda, B = \bigcup_{\rho=1}^{\mu} H_\rho$, 并且对 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu, H_1, H_2, \cdots, H_\mu$ 应用引理 7.1, 则得

$$A = \bigcup_{K_{jk}\subset A} K_{jk},\quad B = \bigcup_{K_{jk}\subset B} K_{jk}.$$

若 E 是满足 $K_{jk}\subset A$, $K_{jk}\not\subset B$ 的小矩形 K_{jk} 的并集, 则

$$A = B\cup E,\quad (B)\cap(E)=\varnothing.$$

因此, 根据 (1) 和 (3),

$$\int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_B |f(P)|\mathrm{d}\omega = \int_E |f(P)|\mathrm{d}\omega \geqslant 0, \tag{7.21}$$

即不等式 (7.19) 成立. 进而, 根据 (1),

$$\int_A f(P)\mathrm{d}\omega - \int_B f(P)\mathrm{d}\omega = \int_E f(P)\mathrm{d}\omega,$$

再根据 (7.18) 式和 (7.21) 式,

$$\left|\int_E f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_E |f(P)|\mathrm{d}\omega = \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_B |f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

因此, (7.20) 式成立. □

7.2　广义积分

a) 广义积分

对一元函数的情况, 开区间, 例如 $(a,+\infty)$ 上连续函数 $f(x,y)$ 的积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是作为广义积分来定义的 (4.3 节 a)). 同样, 二元函数的情况下, 平面上的领域 D 上的连续函数 $f(x,y)$ 的积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也作为广义积分来定义.

对于每一个矩形块 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$, 满足下列两个条件时矩形块序列 $\{A_m\}$ **从内部单调地收敛于** D:

(i) $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_m\subset A_{m+1}\subset\cdots,\quad A_m\subset D$;

(ii) $\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_m) = D$.

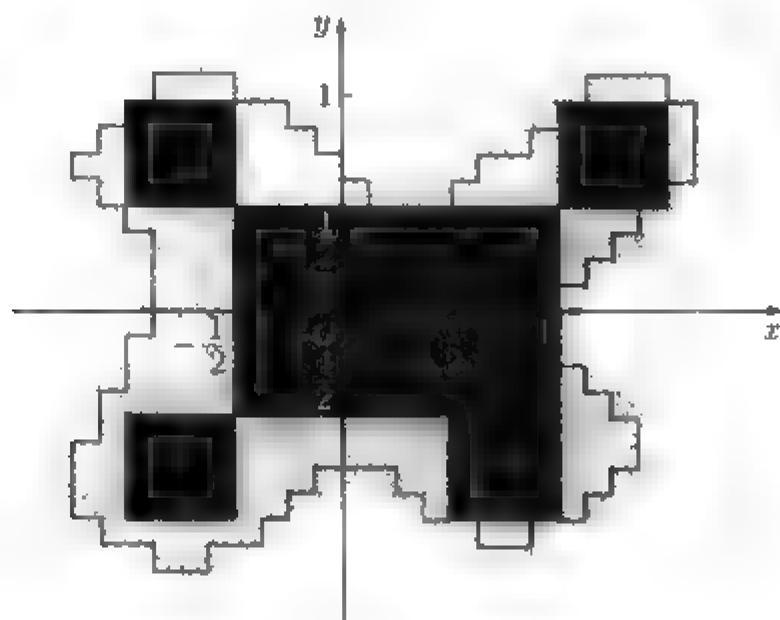
这里 (A_m) 表示 A_m 的开核.

对于每一个自然数 m, 若如下确定矩形块 A_m, 则可以获得从内部单调收敛于 D 的典型矩形块序列 $\{A_m\}$: 对于每一个自然数 m, 令 $\delta_m = 1/2^m$, 将平面 $\mathbf{R}^2$ 分割成边长为 δ_m 的无数个正方形

$$Q_{hk}^m = \{(x,y)|h\delta_m - \delta_m \leqslant x \leqslant h\delta_m, k\delta_m - \delta_m \leqslant y \leqslant k\delta_m\}, \quad h,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{7.22}$$

并且当 D 有界时, A_m 是包含于 D 的 Q_{hk}^m 的全体的并集:

$$A_m = \bigcup_{Q_{hk}^m \subset D} Q_{hk}^m.$$



上图表示 A_1 和 A_3. 当 D 无界时, A_m 是包含于 $D \cap \{(x,y)||x| < m, |y| < m\}$ 的 Q_{hk}^m 的并集:

$$A_m = \bigcup_{Q_{hk}^m \subset D_m} Q_{hk}^m, \quad D_m = \{(x,y) \in D||x| < m, |y| < m\}.$$

这样确定的矩形块 A_m 的序列 $\{A_m\}$ 从内部单调收敛于 D, 即上述条件 (i)、(ii) 显然成立.

给定一个从内部单调收敛于 D 的矩形块序列 $\{A_m\}$, 使得

$$\sigma_m = \int_{A_m} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad s_m = \int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $A_m \subset A_{m+1}$, 所以根据定理 7.5 的 (5), $\sigma_m \leqslant \sigma_{m+1}$, 即 $\{\sigma_m\}$ 是单调非减序列. 所以 $\{\sigma_m\}$ 要么收敛, 要么发散于 $+\infty$(1.5 节 b)).

(1) 当 $\{\sigma_m\}$ 收敛时, 根据 (7.20),

当 $n > m$ 时, $|s_n - s_m| \leqslant \sigma_n - \sigma_m$ 成立.

所以序列 $\{s_m\}$ 也收敛, 即极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在. 称此极限为 $f(P) = f(x,y)(P=(x,y))$ 在 D 上的积分, 用 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或者 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 表示:

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega = \int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.23}$$

因为

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty,$$

所以称广义积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **绝对收敛**.

(2) 当$\{\sigma_m\}$发散于 $+\infty$ 时, 因为 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty$, 所以称广义积分 $\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$**发散于** $+\infty$, 记为

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty.$$

以上是在从内部单调收敛于 D 的一个矩形块序列 $\{A_m\}$ 的基础上讨论了 D 上的广义积分, 但是**广义积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是否绝对收敛, 以及绝对收敛时积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值, 都与矩形块序列 $\{A_m\}$ 的选择方法无关**. [证明] 任取矩形块 A, $A \subset D$ 时, 因为 $D = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(A_m)$, 所以 A 被开集 $(A_1),(A_2),\cdots,(A_m),\cdots$ 覆盖. A 是有界闭集, 所以根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), A 被有限个 $(A_1),(A_2),\cdots,(A_m),\cdots$ 覆盖, 即取自然数 m 充分大时,

$$A \subset (A_1)\cup(A_2)\cup\cdots\cup(A_m) = (A_m) \subset A_m.$$

所以根据 (7.19) 式,

$$\int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega \leqslant \int_{A_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega,$$

因此

$$\int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

所以当考虑所有的矩形块 A, $A \subset D$ 时, 若 $\left\{\int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega \middle| A\subset D\right\}$ 有上界, 则 $\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$; 若无上界, 则 $\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = +\infty$. 有上界时,

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = \sup_{A\subset D}\int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.24}$$

即 $\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega$ 与从内部单调收敛于 D 的矩形块序列$\{A_m\}$的选择方法无关.

当 $\lim_{m\to\infty}\int_{A_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega = \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$ 时, 根据 (7.20) 式, 只要 $A\subset A_m$, 就有

$$\left|\int_{A_m} f(P)\mathrm{d}\omega - \int_A f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_{A_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega,$$

所以当 $m\to\infty$ 时, 若取极限可得不等式

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega - \int_A f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega. \qquad (7.25)$$

此不等式表明 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} f(P)\mathrm{d}\omega$ 与 $\{A_m\}$ 的选择方法无关. 事实上, 若把 $\{B_m\}$ 看成是从内部单调收敛于 D 的任意的矩形块序列, 则 $\lim_{m\to\infty}\int_{B_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega = \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega$, 因此根据 (7.25) 式, 当 $m\to\infty$ 时,

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega - \int_{B_m} f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_{B_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega \to 0. \qquad \square$$

例如, 区间 $[a,+\infty)$ 上连续的函数 $f(x)$ 的广义积分不绝对收敛时, 若存在极限 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$, 则称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛, 其值定义为 (4.3 节)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

虽然此定义是非常自然的, 但是却不能自然地推广到二元函数上. 对于二元函数不能考虑条件收敛广义积分.

定理 7.6 设 $f(P)=f(x,y)$, $g(P)=g(x,y)(P=(x,y))$ 是领域 D 上的连续函数, 并且 $\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$, $\int_D |g(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$. 那么

(1) 对于任意实数 c_1, c_2,

$$\int_D (c_1 f(P) + c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1\int_D f(P)\mathrm{d}\omega + c_2\int_D g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若在领域 D 上, 恒有 $f(P)\geqslant g(P)$, 则

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega \geqslant \int_D g(P)\mathrm{d}\omega,$$

并且除去在 D 上恒有 $f(P)=g(P)$ 的情况,

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega > \int_D g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(3)

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.26}$$

(4) 若 E 是 D 的子领域: $E\subset D$, 则

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega - \int_E f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_E |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.27}$$

证明 (1) 和 (3) 根据广义积分的定义 (7.23) 以及定理 7.5 的 (2) 和 (4) 显然成立. 为了证明 (4), 令 (7.22) 式的正方形 Q_{hk}^m 中包含于 $D\cap\{(x,y)\,||x|<m,|y|<m\}$ 的并集为 A_m; 包含于 $E\cap\{(x,y)\,||x|<m,|y|<m\}$ 的并集为 B_m, 则因为 $B_m\subset A_m$, 根据定理 7.5 的 (5),

$$\left|\int_{A_m} f(P)\mathrm{d}\omega - \int_{B_m} f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_{A_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_{B_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

在 $m\to\infty$ 时, 若等式两边取极限, 则根据广义积分的定义, 得 (7.27) 式. 为证明 (2), 令 $h(P)=f(P)-g(P)$, 则根据假设, D 上恒有 $h(P)=|h(P)|\geqslant 0$. 所以若$n<m$, 则 $A_n\subset A_m$. 所以根据 (7.19) 式, $\int_{A_n} h(P)\mathrm{d}\omega \leqslant \int_{A_m} h(P)\mathrm{d}\omega$, 即 $\left\{\int_{A_m} h(P)\mathrm{d}\omega\right\}$ 是收敛于 $\int_D h(P)\mathrm{d}\omega$ 的单调非减序列. 因此根据定理 7.5 的 (3), $\int_D h(P)\mathrm{d}\omega \geqslant 0$, 并且除去 D 上 $h(P)=f(P)-g(P)=0$ 恒成立的情况, 就有

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega - \int_D g(P)\mathrm{d}\omega = \int_D h(P)\mathrm{d}\omega > 0.$$ □

b) 面积

恒等于 1 的函数1的积分, 例如 $\int_A 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 记为 $\int_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 或者 $\int_A \mathrm{d}\omega$. 对于矩形 $K=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$, 当然

$$\int_K \mathrm{d}\omega = \int_a^b\int_c^d \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)(d-c)$$

是 K 的面积. 所以对于矩形块 A, 若将 A 分割成有限个矩形 $K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$, 则

$$\int_A \mathrm{d}\omega = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{K_\lambda} \mathrm{d}\omega$$

是 A 的面积. A 的面积用 $\omega(A)$ 来表示: $\omega(A)=\int_A \mathrm{d}\omega$. 任意领域 D 的面积定义为

$$\omega(D)=\int_D \mathrm{d}\omega.$$

对于所有的矩形块 A, $A\subset D$, 若 $\omega(A)$ 有上界, 则根据 (7.24),

$$\omega(D)=\sup_{A\subset D}\omega(A).$$

若 $\omega(A)$ 无上界, 则 $\omega(D)=+\infty$. 此外, 若 $\{A_m\}$ 是从内部单调收敛于 D 的矩形块序列, 则

$$\omega(D)=\lim_{m\to\infty}\omega(A_m).$$

若 E 是 D 的子领域, 则显然

$$\omega(E)\leqslant\omega(D),\quad E\subset D.$$

设 $f(P)$ 是矩形块 A 上的连续函数. 则根据定理 7.5 的 (2), 对于任意常数 c 有 $\int_A c\mathrm{d}\omega=c\int_A\mathrm{d}\omega=c\omega(A)$. 所以若在 A 上恒有 $\mu\leqslant f(P)\leqslant \mathrm{M}$, μ,M 是常数, 则根据定理 7.5 的 (3),

$$\mu\omega(A)\leqslant\int_A f(P)\mathrm{d}\omega\leqslant \mathrm{M}\omega(A).$$

因此, 若在 A 上恒有 $|f(P)|\leqslant\mathrm{M}$, 则

$$\left|\int_A f(P)\mathrm{d}\omega\right|\leqslant\mathrm{M}\omega(A). \tag{7.28}$$

当 $f(P)$ 在领域 D 上连续时, 若 $\omega(D)<+\infty$ 且 $f(P)$ 在 D 上有界: $|f(P)|\leqslant\mathrm{M}$, 则对于任意的矩形块 A, $A\subset D$,

$$\int_A|f(P)|\mathrm{d}\omega\leqslant\mathrm{M}\omega(A)\leqslant\mathrm{M}\omega(D).$$

因此, 根据 (7.24) 式,

$$\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega\leqslant\mathrm{M}\omega(D),$$

即广义积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 绝对收敛. 并且根据 (7.26) 式,

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega\right|\leqslant\mathrm{M}\omega(D). \tag{7.29}$$

显然当 D 有界时, $\omega(D) < +\infty$, 所以有界领域 D 上的有界连续函数 $f(P)$ 的广义积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 绝对收敛.

c) 闭区域上的积分

为了讨论有界闭领域的边界, 首先叙述一下曲线. 设 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是定义在闭区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数, 则当 t 在实直线上从 a 到 b 运动时, 点 $P(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ 在平面上运动而描绘出 "曲线". 此时, 称点集 $C=\{P(t)|a\leqslant t\leqslant b\}$ 为**曲线**(curve). 例如, 当有必要考虑曲线的 "方向" 时, 对于每一个 $t\in I$, 分别对应于点 $P(t)\in C$ 的映射: $t\to P(t)$ 称为曲线, 但是在本章中没有这个必要, 所定义的曲线是指点 $P(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 的集合 C. 对于曲线 C, 用

$$C=\{P(t)|a\leqslant t\leqslant b\},\quad P(t)=(\varphi(t),\psi(t)),\tag{7.30}$$

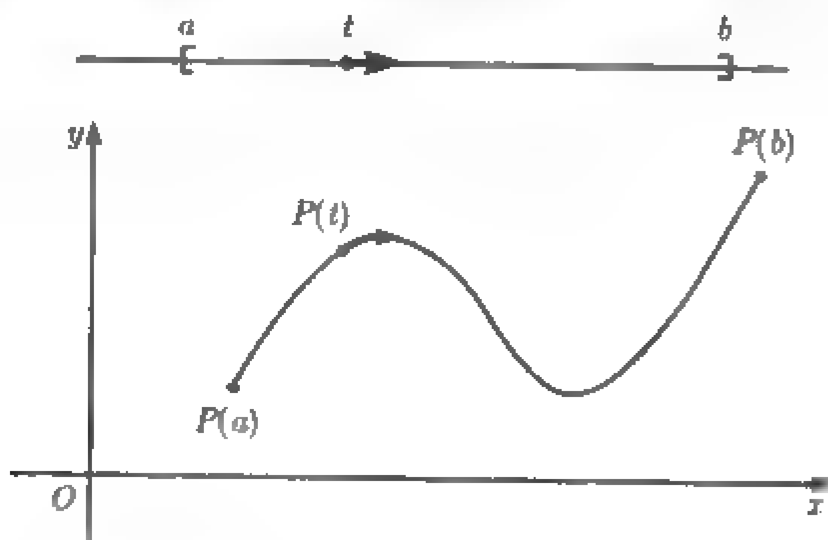
来表示的连续函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 存在无穷多个. 例如, 令

$$u(\tau)=\varphi(a+(b-a)\tau),\quad v(\tau)=\psi(a+(b-a)\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

则

$$C=\{Q(\tau)|0\leqslant\tau\leqslant 1\},\quad Q(\tau)=(u(\tau),v(\tau)).$$

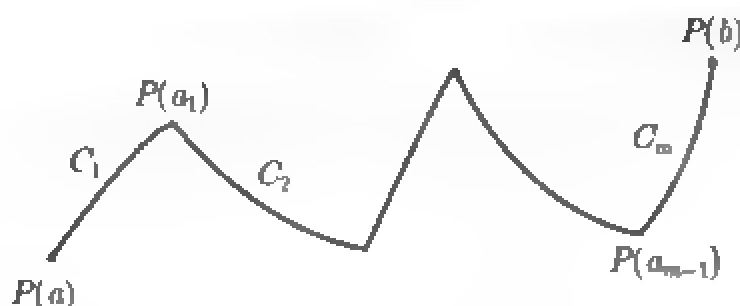
称 (7.30) 式的右边为曲线 C 的**参数表示**, 称 t 为其**参数**.



在曲线 $C=\{P(t)|a\leqslant t\leqslant b\}$ 上的点 $P(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ 处, 如果 $\varphi(t)$,$\psi(t)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上关于 t 的连续可微函数, 并且恒有 $|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2>0$, 即 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 不同时为 0, 那么就称 C 是**光滑曲线**(smooth curve). 在 a 和 b 之间取 $m-1$ 个点 $a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$, 并且令 $a_0=a$, $a_m=b$, 则若闭区间 $[a,b]$ 被分割成 m 个闭区间 $[a_{k-1},a_k]$,$k=1,2,\cdots,m$, 则曲线 $C=\{P(t)|a\leqslant t\leqslant b\}$ 也被分割成 m 条曲线;

$$C=C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k\cup\cdots\cup C_m,\quad C_k=\{P(t)|a_{k-1}\leqslant t\leqslant a_k\}.$$

进而, 如果每个 C_k 都是光滑曲线, 则称曲线 C **分段光滑**(piecewise smooth).



此外, 在曲线 $C=\{(\varphi(t),\psi(t))|a\leqslant t\leqslant b\}$ 上, 若恒有 $\varphi(t)=t$, 则 C 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $y=\psi(x)$ 的图像 $G_\psi=\{(x,\psi(x))|a\leqslant x\leqslant b\}$(2.1 节). 同理, 若恒有 $\psi(t)=t$, 则 C 是连续函数 $x=\varphi(y)$ 的图像 $\{(\varphi(y),y)|a\leqslant y\leqslant b\}$. 这两种情况下的 C 都称为**初等曲线**①.

光滑曲线可以分割成有限条初等曲线. [证明] 设 $C=\{P(t)|a\leqslant t\leqslant b\}$, $P(t)=(\varphi(t),\psi(t))$ 是光滑曲线. 根据定理 2.4, 闭区间 $[a,b]$ 上关于 t 连续的函数 $|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2$ 具有最小值 μ. 根据假设 $\mu>0$, 若令 $\mu=2\lambda^2,\lambda>0$, 则

$$|\varphi'(t)|^2+|\psi'(t)|^2\geqslant 2\lambda^2,$$

所以在各点 $t(a\leqslant t\leqslant b)$ 处, $|\varphi'(t)|\geqslant\lambda$, 或者 $|\psi'(t)|\geqslant\lambda$. 根据定理 2.3, 在 $[a,b]$ 上连续的函数 $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 所以对于 λ, 存在正实数 δ, 使得

当 $|t-s|<\delta$ 时, 就有 $|\varphi'(t)-\varphi'(s)|<\lambda,|\psi'(t)-\psi'(s)|<\lambda$.

取点 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots,a_m$, 使得

$$a_0=a<a_1<\cdots<a_{k-1}<a_k<\cdots<a_m=b,\quad a_k-a_{k-1}<\delta.$$

下面证明曲线 C 被分割成 m 条初等曲线 $C_k=\{P(t)|a_{k-1}\leqslant t\leqslant a_k\}$. 因为 $|\varphi'(a_k)|\geqslant\lambda$ 或者 $|\psi'(a_k)|\geqslant\lambda$, 所以若 $|\varphi'(a_k)|\geqslant\lambda$, 则 $\varphi'(a_k)\geqslant\lambda$ 或者 $\varphi'(a_k)\leqslant-\lambda$ 所以若假设 $\varphi'(a_k)\geqslant\lambda$, 则当 $a_{k-1}\leqslant t\leqslant a_k$ 时, $|a_k-t|<\delta$, 从而 $|\varphi'(a_k)-\varphi'(t)|<\lambda$, 因此 $\varphi'(t)>\varphi'(a_k)-\lambda\geqslant 0$, 即在闭区间 $[a_{k-1},a_k]$ 上恒有 $\varphi'(t)>0$. 从而根据定理 3.6, 关于 t 的连续函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[a_{k-1},a_k]$ 上单调递增. 因而根据定理 2.7, 其反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 是定义在闭区间 $[\alpha_k,\beta_k]$, $\alpha_k=\varphi(a_{k-1})$,$\beta_k=\varphi(a_k)$ 上的连续的单调递增函数, 并且

$$P(t)=(\varphi(t),\psi(t))=(x,\psi(\varphi^{-1}(x))).$$

故, 若令 $\Psi(x)=\psi(\varphi^{-1}(x))$, 则 $\Psi(x)$ 是 $[\alpha_k,\beta_k]$ 上的关于 x 的连续函数, 并且

$$C_k=\{(x,\Psi(x))|\alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k\},\tag{7.31}$$

① 根据服部晶夫氏.

即 C_k 是初等曲线. 以上我们假定了 $\varphi'(a_k) \geqslant \lambda$, 若令 $\varphi'(a_k) \leqslant -\lambda$, 则 $x = \varphi(t)$ 在 $[a_{k-1}, a_k]$ 上单调递减. 因此 $t = \varphi^{-1}(x)$ 在 $[\alpha_k, \beta_k](\alpha_k = \varphi(a_k),\ \beta_k = \varphi(a_{k-1}))$ 上单调递减, 但是 C_k 用 $\Psi(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ 可以同样表示为 (7.31) 式的形式. 当 $|\psi'(a_k)| \geqslant \lambda$ 时, 由于 $\psi(t)$ 在 $[a_{k-1}, a_k]$ 上是单调函数, 所以 C_k 可以用

$$C_k = \{(\Phi(y), y) | \alpha_k \leqslant y \leqslant \beta_k\}, \quad \Phi(y) = \varphi(\psi^{-1}(y)),$$

表示.

虽然初等曲线未必是光滑的, 但是根据定理 3.4 和定理 3.3, (7.31) 式中 $\Psi(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ 关于 x 连续可微, 所以 C_k 是光滑的初等曲线. 从而**光滑曲线可以分割成有限条光滑初等曲线**. 因此分段光滑曲线也可以分割成有限条光滑初等曲线.

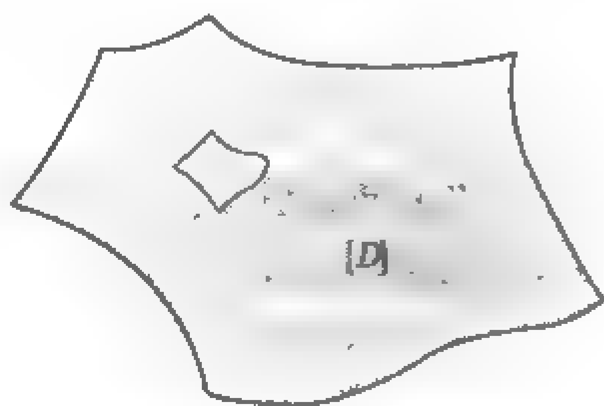
若闭领域可以用其开核 D 的闭包 $[D]$ 来表示, 则 D 是区域.

定义 7.3　设 $[D]$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭领域, D 是其开核. 如果 $[D]$ 的边界是由有限条初等曲线组成的, 即

$$[D] - D = \bigcup_{k=1}^{m} C_k, \quad C_k \text{ 是初等曲线},$$

那么就称 $[D]$ 为闭区域[①].

如上所述, 光滑曲线可以分割成有限条初等曲线, 所以**边界是由有限条光滑曲线组成的有界闭领域是闭区域**. 例如矩形、圆盘 $\{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}, r > 0$, 等都是闭区域.



定义 7.4　设 $[D]$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭区域, D 是其开核. $[D]$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 在 $[D]$ 上的 (广义) 积分定义为

$$\int_{[D]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.32}$$

根据定理 6.3, $f(x,y)$ 在 $[D]$ 上有界, 当然也在领域 D 上有界. 所以如 b)

① 由于找不到其他合适的术语, 所以用 "闭区域" 来表示. 高木貞治《解析概論》第 8 章中, "区域" 形式上与 "点集" 同义.

中所述, (7.32) 式右边的积分绝对收敛. 若令 $f(P)=f(x,y)(P=(x,y))$, 则 $\int_{[D]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以写成 $\int_{[D]}f(P)\mathrm{d}\omega$ 等.

与矩形的情况 (7.1 节 b)) 相同, 如果闭区域 $[D]$ 可以表示为任意两个都没有公共内点的有限个闭区域 $[D_\lambda]$, $\lambda=1,2,\cdots,\nu$ 的并集

$$[D]=[D_1]\cup[D_2]\cup\cdots\cup[D_\lambda]\cup\cdots\cup[D_\nu],\quad D_\lambda\cap D_\rho=\varnothing\quad(\lambda\neq\rho),$$

则称 $[D]$**被分割成有限个闭区域**$[D_1],[D_2],\cdots,[D_\nu]$.

定理 7.7 设 $f(x,y)$ 是闭区域 $[D]$ 上的连续函数, 若 $[D]$ 被分割成有限个闭区域 $[D_1],[D_2],\cdots,[D_\nu]$, 则

$$\int_{[D]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{[D_\lambda]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.33}$$

证明 对于每个自然数 m, 令 $\delta_m=1/2^m$, 如 a) 中所述, 平面 $\mathbf{R}^2$ 被分割成无穷多个边长为 δ_m 的正方形 Q^m_{hk}, $h,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$, 若令 $x_h=h\delta_m, y_k=k\delta_m$, 则

$$Q^m_{hk}=\{(x,y)|x_{h-1}\leqslant x\leqslant x_h, y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k\}.$$

记包含于 D 的 Q^m_{hk} 的全体的并集为

$$A_m=\bigcup_{Q^m_{hk}\subset D}Q^m_{hk},$$

则矩形块序列$\{A_m\}$从内部单调收敛于 D. 所以 $\int_{[D]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 因此根据广义积分的定义 (7.23) 式,

$$\int_{[D]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{m\to\infty}\int_{A_m}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.34}$$

同理, 若令

$$A_{\lambda m}=\bigcup_{Q^m_{hk}\subset D_\lambda}Q^m_{hk}, \tag{7.35}$$

则

$$\int_{[D_\lambda]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{m\to\infty}\int_{A_{\lambda m}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若令 $[D_\lambda]$ 的边界为 C_λ, 则其并集为

$$C=\bigcup_{\lambda=1}^{\nu}C_\lambda,\quad C_\lambda=[D_\lambda]-D_\lambda,$$

从而

$$[D] = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} [D_\lambda] = C \cup D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_\nu.$$

根据假设 $D_\lambda \cap D_\rho = \varnothing (\lambda \neq \rho)$, 所以若正方形 $Q_{hk}^m \subset D$ 与 C 没有公共点, 则 Q_{hk}^m 包含于某一个 D_λ 中. 这是因为, Q_{hk}^m 的开核 (Q_{hk}^m) 是连通开集, 并且不能由两个以上的非空开集 $(Q_{hk}^m) \cap D_\lambda$, $(Q_{hk}^m) \cap D_\rho, \cdots$ 分割, 所以 (Q_{hk}^m) 包含于某一个 D_λ 中, 从而 $Q_{hk}^m \subset D_\lambda$. 即若 $Q_{hk}^m \subset D$, 则 $Q_{hk}^m \cap C \neq \varnothing$, 或者对于 D_λ, $Q_{hk}^m \subset D_\lambda$ 成立. 故若令满足 $Q_{hk}^m \subset D$, $Q_{hk}^m \cap C \neq \varnothing$ 的正方形 Q_{hk}^m 的并集为 B_m, 则

$$A_m = B_m \cup A_{1m} \cup \cdots \cup A_{\lambda m} \cup \cdots \cup A_{\nu m},$$

并且矩形块 $B_m, A_{1m}, A_{2m}, \cdots, A_{\nu m}$ 中任意两个都没有公共的内点. 所以根据定理 7.5 的 (1),

$$\int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{B_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{A_{\lambda m}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此, 根据 (7.34) 式和 (7.35) 式,

$$\int_{[D]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty} \int_{B_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{[D_\lambda]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $f(x,y)$ 在 $[D]$ 上有界, 即 $|f(x,y)| \leqslant \mathrm{M}$, 所以根据 (7.28) 式,

$$\left| \int_{B_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \leqslant \mathrm{M}\omega(B_m).$$

所以要证明 (7.33) 式只须验证

$$\lim_{m\to\infty} \omega(B_m) = 0$$

即可. 根据假设 $C = \bigcup_{\lambda=1}^{\nu} C_\lambda$ 是有限条初等曲线的并集, 所以将其中的一条初等曲线改用 C 表示, 并且对于 C 证明下面的引理即可.

引理 7.2 令与初等曲线 C 有公共点的正方形 Q_{hk}^m 的并集为

$$B_m = \bigcup_{Q_{hk}^m \cap C \neq \varnothing} Q_{hk}^m,$$

则

$$\lim_{m\to\infty} \omega(B_m) = 0.$$

证明 设 $C=\{(x,\varphi(x))|a\leqslant x\leqslant b\}$, 并且 $\varphi(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 因为 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续 (定理 2.3), 所以对于任意给定的正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |x-t|<\delta(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |\varphi(x)-\varphi(t)|<\varepsilon. \tag{7.36}$$

对于这个 $\delta(\varepsilon)$, 若 m 是满足

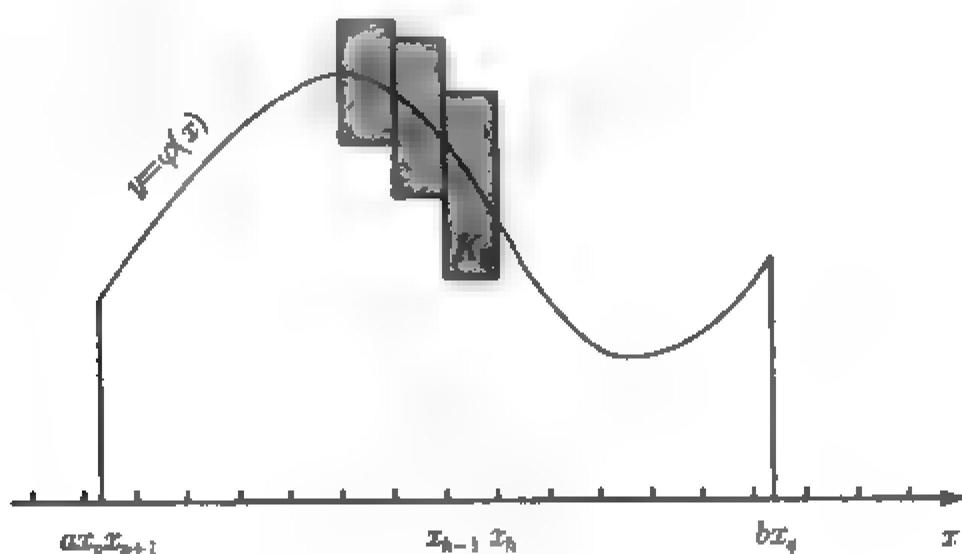
$$\delta_m=\frac{1}{2^m}<\delta(\varepsilon)$$

的自然数, 则当 $x_h=h\delta_m, h=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时, 一定存在满足

$$x_{p-1}<a\leqslant x_p<\cdots<x_{h-1}<x_h<\cdots<x_{q-1}\leqslant b<x_q$$

的整数 p,q. 对于每一个 $h=p+1,p+2,\cdots,q-1$, 在闭区间 $[x_{h-1},x_h]$ 上 $\varphi(x)$ 的最大值和最小值分别设为 M_h 和 μ_h. 当 $h=p$ 时, 在 $[a,x_p]$ 上 $\varphi(x)$ 的最大值和最小值分别设为 M_p 和 μ_p(特别地, 当 $a=x_p$ 时, 令 $\mathrm{M}_p=\mu_p=\varphi(a)$). 又当 $h=q$ 时, $[b,x_q]$ 上最大值和最小值分别设为 M_q 和 μ_q. 因为 $x_h-x_{h-1}=\delta_m<\delta(\varepsilon)$, 所以根据 (7.36) 式,

$$\mathrm{M}_h-\mu_h<\varepsilon, \quad h=p,p+1,\cdots,q.$$



因此, 若令

$$K_h=\{(x,y)|x_{h-1}\leqslant x\leqslant x_h,\mu_h-\delta_m\leqslant y\leqslant \mathrm{M}_h+\delta_m\}, h=p,p+1,\cdots,q,$$

则每个矩形 K_h 的面积为

$$\omega(K_h)=(\mathrm{M}_h-\mu_h+2\delta_m)(x_h-x_{h-1})<(\varepsilon+2\delta_m)(x_h-x_{h-1}).$$

如果正方形 Q^m_{hk} 和 C 有公共点, 那么显然有 $Q^m_{hk}\subset K_h, p\leqslant h\leqslant q$. 所以,

$$B_m\subset K_p\cup K_{p+1}\cup\cdots\cup K_h\cup\cdots\cup K_q,$$

因此

$$\omega(B_m) \leqslant \sum_{h=p}^{q} \omega(K_h) < (\varepsilon + 2\delta_m)(x_q - x_{p-1}) \leqslant (\varepsilon + 2\delta_m)(b - a + 2\delta_m).$$

从而

$$\limsup_{m\to\infty} \omega(B_m) \leqslant \varepsilon(b-a),$$

其中 ε 为任意的正实数. 所以

$$\lim_{m\to\infty} \omega(B_m) = 0. \qquad \square$$

在定义 7.1 中, 我们已经定义了矩形 K 上连续函数的积分 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 又因为矩形是闭区域, 所以 (7.32) 式给出了积分的新定义:

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(K)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这个新的定义实际上与原来的定义是一致的, 即必须验证定义 7.1 的积分 $\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与广义积分 $\int_{(K)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是一致的. 为此设 $K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, 例如 ε 是满足 $4\varepsilon \leqslant b-a, 4\varepsilon \leqslant d-c$ 的正实数, 若令

$$A_m = \left\{(x,y)\middle| a + \frac{\varepsilon}{m} \leqslant x \leqslant b - \frac{\varepsilon}{m}, c + \frac{\varepsilon}{m} \leqslant y \leqslant d - \frac{\varepsilon}{m}\right\},$$

则只由一个矩形组成的矩形块 A_m 的序列 $\{A_m\}$ 从内部单调收敛于 (K), 所以根据广义积分的定义 (7.23) 式,

$$\int_{(K)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从 K 中除去 A_m 的开核 (A_m) 后剩下的 $B_m = K - (A_m)$ 当然也是矩形, 并且根据定理 7.5 的 (1),

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{B_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$f(x,y)$ 在 K 上有界, 即 $|f(x,y)| \leqslant \mathrm{M}$, M 是常数. 所以根据 (7.28) 式,

$$\left|\int_{B_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \mathrm{M}\omega(B_m) = \mathrm{M}\left(b-a+d-c-\frac{2\varepsilon}{m}\right)\frac{2\varepsilon}{m} \to 0 \quad (m\to\infty).$$

因此

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(K)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若矩形块 A 的开核 (A) 连通, 则矩形块 A 是闭区域. 从而若 A 被分割成有限个矩形 K_λ, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$, 则根据定理 7.7, A 上的连续函数 $f(x, y)$ 在定义 7.4 意义下的广义积分 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 满足

$$\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{(K_\lambda)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此根据上述结果, 广义积分 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与定义 7.2 意义下的矩形块 A 上的积分 $\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{K_\lambda} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 一致.

目前为止我们一直用字母 K 表示了矩形, 但是从现在开始闭区域 $[D]$ 也用 K 来表示: $K = [D]$.

定理 7.8 设 $f(P) = f(x,y), g(P) = g(x,y) (P = (x,y))$ 是闭区域 K 上的连续函数.

(1) 对于任意的实数 c_1, c_2,

$$\int_K (c_1 f(P) + c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1 \int_K f(P)\mathrm{d}\omega + c_2 \int_K g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若在 K 上恒有 $f(P) \geqslant g(P)$, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega \geqslant \int_K g(P)\mathrm{d}\omega,$$

并且除去 K 上恒有 $f(P) = g(P)$ 的情况,

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega > \int_K g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(3)

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_K |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.37}$$

(4) 若 L 是包含于 K 的一个闭区域: $L \subset K$, 则

$$\int_L |f(P)|\mathrm{d}\omega \leqslant \int_K |f(P)|\mathrm{d}\omega, \tag{7.38}$$

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega - \int_L f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_K |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_L |f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.39}$$

证明 根据广义积分的定义 (7.32) 式和定理 7.6, 结论显然成立. □

定义闭区域 K 的面积为

$$\omega(K)=\int_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据 (7.32) 式,

$$\omega(K)=\omega(D), \quad D=(K). \tag{7.40}$$

若将闭区域 K 分割成有限个闭区域 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$, 则根据定理 7.7,

$$\omega(K)=\omega(K_1)+\omega(K_2)+\cdots+\omega(K_\nu). \tag{7.41}$$

若 L 是包含于 K 的一个闭区域, 则根据上述定理 7.8 的 (4),

$$\omega(L)\leqslant\omega(K), \quad L\subset K. \tag{7.42}$$

设函数 $f(P)$ 在闭区域 K 上连续, 并且恒有 $\mu\leqslant f(P)\leqslant \mathsf{M}$, 则根据定理 7.8 的 (2) 和 (1),

$$\mu\omega(K)\leqslant\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\leqslant \mathsf{M}\omega(K), \tag{7.43}$$

所以, 若 K 上恒有 $|f(P)|\leqslant \mathsf{M}$, 则

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\right|\leqslant \mathsf{M}\omega(K). \tag{7.44}$$

定理 7.9(中值定理) 如果函数 $f(P)=f(x,y), P=(x,y)$ 在闭区域 K 上连续, 那么存在满足

$$\frac{1}{\omega(K)}\int_K f(P)\mathrm{d}\omega=f(\Xi), \quad \Xi\in K \tag{7.45}$$

的点 $\Xi=(\xi,\eta)$.

证明 根据定理 6.3, $f(P)$ 在 K 上有最大值和最小值. 令最大值为 M, 最小值为 μ, 则根据 (7.43) 式,

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega=\lambda\omega(K), \quad \mu\leqslant\lambda\leqslant \mathsf{M},$$

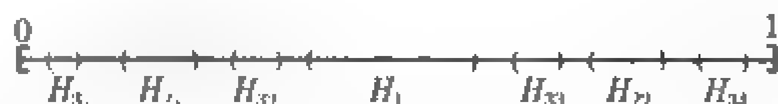
根据定理 6.5, 函数 $f(P)$ 的值域 $f(K)$ 是闭区间 $[\mu, \mathsf{M}]$. 因此存在满足 $f(\Xi)=\lambda$ 的点 $\Xi\in K$. □

闭区域 $[D]$ 上连续函数的积分定义 (7.32) 式似乎适用于任意的有界闭领域, 但是定理 7.7 仅在条件限制下才成立, 所以有界闭领域 $[D]$ 上的连续函数的积分即使用 (7.32) 式定义, 也是没有意义的.

例 7.1 预先给定单调递减数列 $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n>0$, 并且满足

$$\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\varepsilon_n<1.$$

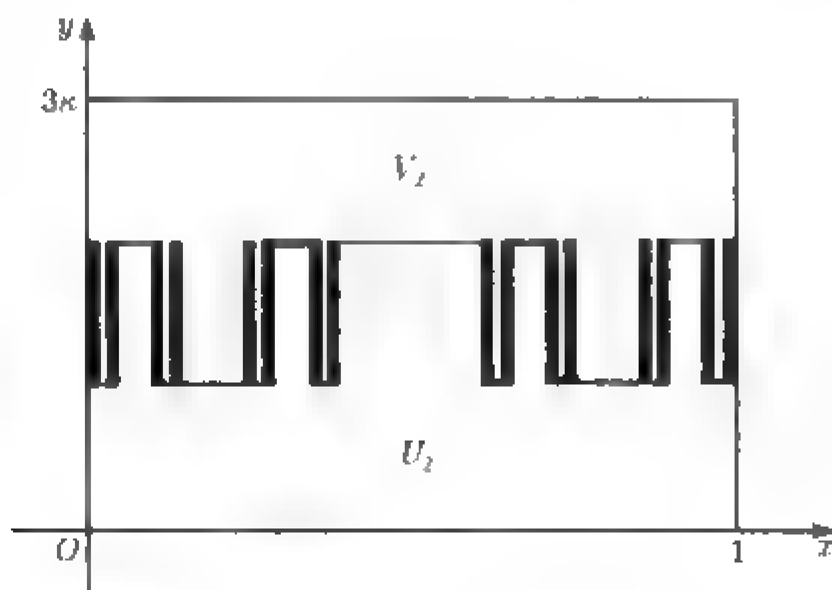
H_1 是实直线上的以闭区间 $I_1 = [0,1]$ 的中点 $1/2$ 为中心、ε_1 为宽的开区间. 从 I_1 中除去 H_1 后剩下的两个闭区间是 I_{21}, I_{22}. 以 I_{21}, I_{22} 的中点为中心、ε_2 为宽的开区间分别设为 H_{21}, H_{22} 从 I_{21} 中除去 H_{21}, 从 I_{22} 中除去 H_{22} 剩下的四个闭区间是 $I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34}$,



以其各自的中点为中心、ε_3 为宽的开区间分别是 $H_{31}, H_{32}, H_{33}, H_{34}$. 以此类推有 $I_{41}, I_{42}, \cdots, I_{48}, H_{41}, H_{42}, \cdots, H_{48}, \cdots, I_{n1}, I_{n2}, \cdots, I_{n2^{n-1}}, H_{n1}, H_{n2}, \cdots, H_{n2^{n-1}}, \cdots$. 从闭区间 $I_1 = [0,1]$ 中除去开区间 H_1 以及所有的 $H_{nk}(k = 1,2,\cdots,2^{n-1}, n = 2,3,4,\cdots)$ 后剩下的集合 C 称为**一般 Cantor 集合**, 该集合是闭集, 并且不包含任何开区间. 2^{n-1} 个开区间 $H_{nk}(k = 1,2,\cdots,2^{n-1})$ 的并集设为 $H_n = \bigcup_k H_{nk}$, 并且令

$$L_m = H_1 \cup H_3 \cup H_5 \cup \cdots \cup H_{2m-1},$$

$$M_m = H_2 \cup H_4 \cup H_6 \cup \cdots \cup H_{2m}.$$



对于给定的一正实数 κ, 考虑矩形 $K = \{(x,y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 3\kappa\}$. L_m 和开区间 $(0, 2\kappa)$ 的直积 $L_m \times (0, 2\kappa) = \{(x,y) | x \in L_m, 0 < y < 2\kappa\}$ 是包含于 K 的开集合, 并且

$$U_m = L_m \times (0, 2\kappa) \cup \{(x,y) | 0 < x < 1, 0 < y < \kappa\}$$

是包含于 K 的领域. 构成 L_m 的开区间 H_{nk} 的宽的总和为

$$\rho_m = \varepsilon_1 + 2^2\varepsilon_3 + 2^4\varepsilon_5 + \cdots + 2^{2m-2}\varepsilon_{2m-1},$$

所以 U_m 的面积为

$$\omega(U_m) = \kappa + \rho_m \kappa.$$

U_m 关于 m 单调递增, 即 $U_m \subset U_{m+1}$, 所以其并集

$$D = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots \cup U_m \cup \cdots$$

是包含于 K 的领域, 并且其面积为

$$\omega(D) = \lim_{m\to\infty} \omega(U_m) = \kappa + \rho\kappa, \quad \rho = \lim_{m\to\infty} \rho_m.$$

这是因为, 对于任意的矩形块 $A \subset D$, 只要取 m 充分大, 就有 $A \subset U_m \subset D$, 所以 $\omega(A) \leqslant \omega(U_m) \leqslant \omega(D)$, 因此

$$\omega(D) = \sup_{A\subset D} \omega(A) = \lim_{m\to\infty} \omega(U_m).$$

同理,

$$V_m = M_m \times (\kappa, 3\kappa) \cup \{(x,y)|0 < x < 1, 2\kappa < y < 3\kappa\}$$

也是包含于 K 的领域, 并且

$$\omega(V_m) = \kappa + \tau_m\kappa, \quad \tau_m = 2\varepsilon_2 + 2^3\varepsilon_4 + \cdots + 2^{2m-1}\varepsilon_{2m},$$

V_m 的并集

$$E = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_m \cup \cdots$$

也是包含于 K 的领域

$$\omega(E) = \kappa + \tau\kappa, \quad \tau = \lim_{m\to\infty} \tau_m.$$

因为 $L_m \cap M_m = \varnothing$, 所以 $U_m \cap V_m = \varnothing$, 因此 $D \cap E = \varnothing$, 故 $[D] \cap E = \varnothing$, $D \cap [E] = \varnothing$. 为了证明

$$(K) \subset D \cup [E],$$

首先验证 $C \times [\kappa, 2\kappa] \subset [E]$. 对于任意给定的一点 (ξ, η), $\xi \in C$, $\kappa < \eta < 2\kappa$, 关于每一个 n, 都有 $C \subset \bigcup_k I_{nk}$, 所以存在满足 $\xi \in I_{nk}$ 的 k. 闭区间 I_{nk} 的宽 $< 1/2^{n-1}$ 且 $H_{nk} \subset I_{nk}$, 所以若任选 $x_n \in H_{nk}$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ. 若 $n = 2m$ 是偶数, 则 $x_{2m} \in M_m$, 所以 $(x_{2m}, \eta) \in E$, 并且当 $m \to \infty$ 时, $(x_{2m}, \eta) \to (\xi, \eta)$. 因此 $(\xi, \eta) \in [E]$, 从而

$$C \times [\kappa, 2\kappa] \subset [E]. \tag{7.46}$$

任取点 $P = (x, y) \in (K)$ 时, 显然有: 若 $y \geqslant 2\kappa$, 则 $P \in [E]$; 若 $y < \kappa$, 则 $P \in D$. 又若 $\kappa \leqslant y < 2\kappa$, $x \in C$, 则根据 (7.46) 式, $P \in [E]$. 若 $\kappa \leqslant y < 2\kappa$ 且 $x \notin C$, 则 x 属于某 H_n: $x \in H_n$. 此时, 若 n 是奇数 $2m-1$, 则 $x \in L_m$, 所以 $P \in D$; 若

n 是偶数 $2m$, 则 $x \in M_m$, 因此 $P \in [E]$. 不论哪种情况, 都有 $P \in D \cup [E]$, 从而 $(K) \subset D \cup [E]$.

D 是闭领域 $[D]$ 的开核. 这是因为, 若 P 是 $[D]$ 的内点, 则 $[D] \subset K$, 所以 $P \in (K)$, 因此 $P \in D$ 或者 $P \in [E]$, 又因为 $[D] \cap E = \varnothing$, 若 $P \in [E]$, 则 P 一定是 $[D]$ 的边界点. 同理 E 是 $[E]$ 的开核. 从 $(K) \subset D \cup [E]$ 可直接推得,

$$K = [D] \cup [E],$$

即矩形 K 被分割成两个没有公共内点的闭领域 $[D]$ 和 $[E]$.

关于闭领域, 如果定理 7.7 无条件成立, 那么 (7.41) 式也同样成立. 所以,

$$\omega(K) = \omega([D]) + \omega([E]) = \omega(D) + \omega(E),$$

则

$$3\kappa = \kappa + \rho\kappa + \kappa + \tau\kappa.$$

这与

$$\rho + \tau = \sigma < 1$$

相矛盾, 所以关于闭领域 $[D]$ 和 $[E]$, 定理 7.7 不成立.

注 设 S 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的任意给定的有界点集, Q_{hk}^m 是 (7.22) 式中定义的正方形, $\underline{A}_m$ 是包含于 S 的 Q_{hk}^m 的并集, $\overline{A}_m$ 是满足 $Q_{hk}^m \cap S \neq \varnothing$ 的 Q_{hk}^m 的并集, 则

$$\underline{A}_1 \subset \underline{A}_2 \subset \underline{A}_3 \subset \cdots \subset \underline{A}_m \subset \cdots,$$

$$\overline{A_1} \supset \overline{A_2} \supset \overline{A_3} \supset \cdots \supset \overline{A}_m \supset \cdots.$$

若令矩形块 $\underline{A}_m$ 和 $\overline{A}_m$ 的面积分别是 $\underline{\omega}_m$ 和 $\overline{\omega}_m$, 则$\{\underline{\omega}_m\}$是单调非减数列, $\{\overline{\omega}_m\}$是单调非增数列, 并且极限 $\underline{\omega} = \lim\limits_{m\to\infty} \underline{\omega}_m$ 和 $\overline{\omega} = \lim\limits_{m\to\infty} \overline{\omega}_m$ 存在. 分别称极限 $\underline{\omega}$ 和 $\overline{\omega}$ 为 S 的**内面积**和**外面积**, 用 $\underline{\omega}(S)$ 和 $\overline{\omega}(S)$ 表示:

$$\underline{\omega}(S) = \lim_{m\to\infty} \omega(\underline{A}_m), \quad \overline{\omega}(S) = \lim_{m\to\infty} \omega(\overline{A}_m).$$

因为 $\underline{A}_m \subset S \subset \overline{A}_m$, 所以一般地,

$$\underline{\omega}(S) \leqslant \overline{\omega}(S),$$

若 $\underline{\omega}(S) = \overline{\omega}(S)$, 则称 S 的**面积确定**, 并且 S 的**面积定义**为

$$\omega(S) = \underline{\omega}(S) = \overline{\omega}(S).$$

若 $\underline{\omega}(S) < \overline{\omega}(S)$, 则称 S*的面积不确定*. 若 A_m 是包含于 S 的开核 (S) 的 Q_{hk}^m 的并集, B_m 是与 S 的边界 $[S]-(S)$ 没有公共点的 Q_{hk}^m 的并集, 则

$$A_m \subset \underline{A}_m \subset \overline{A}_m \subset A_m \cup B_m, (A_m) \cap (B_m) = \varnothing,$$

所以

$$\omega(A_m) \leqslant \omega(\underline{A}_m) \leqslant \omega(\overline{A}_m) \leqslant \omega(A_m) + \omega(B_m).$$

因此, 若 $\lim_{m\to\infty} \omega(B_m) = 0$, 则

$$\lim_{m\to\infty} \omega(A_m) = \lim_{m\to\infty} \omega(\underline{A}_m) = \lim_{m\to\infty} \omega(\overline{A}_m),$$

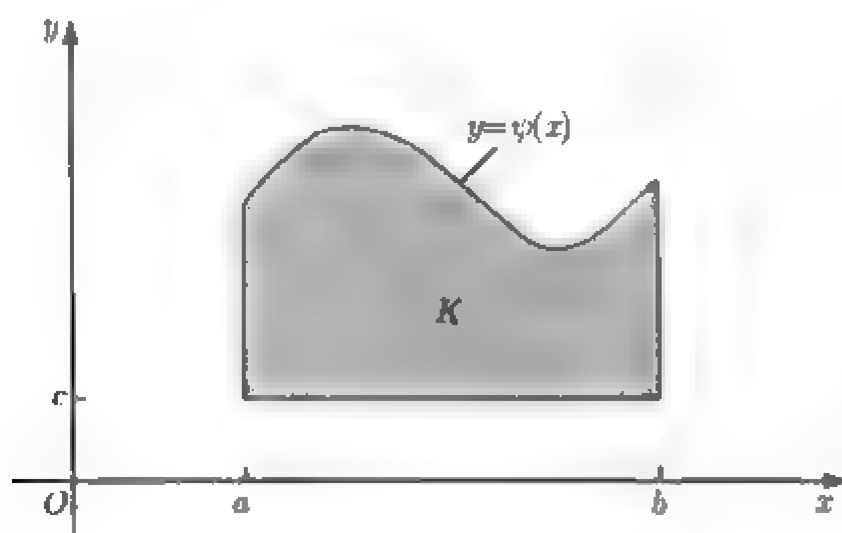
即 S 是面积确定的, 并且其面积 $\omega(S)$ 与开核 (S) 的面积 $\lim_{m\to\infty} \omega(A_m)$ 一致. 根据引理 7.2, 在定义 7.3 的意义下的闭区域, 即边界是由有限条初等曲线组成的有界闭领域的面积确定. 例 7.1 的 [D] 和 [E] 给出了面积不确定的有界闭领域的例子. 微积分中对于面积的考察传统上一般从有界点集的内面积和外面积开始, 但是在实际应用上适合我们使用的区域是定义 7.3 意义下的闭区域或其有限个的粘接[①], 所以本书将对象限定在领域及闭区域上来考察面积. 领域及闭区域分别是实直线上的开区间和闭区间在平面上的自然推广.

d) 累次积分

设 $\psi(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上连续且是满足 $\psi(x) > c$ (c 是常数) 的关于 x 的函数. 如果

$$K = \{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

那么 K 是闭区域.



定理 7.10 如果两个变量 x, y 的二元函数 $f(x, y)$ 在闭区域 K 上连续, 那么积分 $\int_c^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$ 是 $x (a \leqslant x \leqslant b)$ 的连续函数, 并且等式

$$\int_K f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \tag{7.47}$$

成立.

① 高木貞治《解析概論》, p.329.

当 $\psi(x)=d=$ 常数时, 等式 (7.47) 可以回归于 (7.11) 式. 同 (7.11) 式一样, (7.47) 式右边形式的积分称为累次积分. 令 $f(x,y)=1$, 则 (7.47) 式变为

$$\omega(K)=\int_a^b(\psi(x)-c)\mathrm{d}x. \tag{7.48}$$

定理 7.10 的证明 首先证明 (7.48) 式. 在高中数学中作为事实承认了 (7.48) 式右边的积分与闭区域 K 的面积相等, 但在那里对于 "面积" 却没有给出明确的定义. 在本书卷 I 的 4.1 节中将 (7.48) 式右边的积分定义为 K 的面积, 但若根据本节 c) 中所述的闭区域面积的定义, K 的面积 $\omega(K)$ 与 (7.48) 式右边的积分是分别独立定义的. 因此, 此处必须重新证明 (7.48) 式.

考虑闭区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\}, a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$. 设 $\psi(x)$ 在每个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最小值和最大值分别为 μ_k 和 M_k, 并且令

$$s_\Delta=\sum_{k=1}^m(\mu_k-c)(x_k-x_{k-1}),$$

$$S_\Delta=\sum_{k=1}^m(\mathrm{M}_k-c)(x_k-x_{k-1}),$$

则根据定积分的定义 (4.1 节),

$$\lim_{\delta[\Delta]\to0}s_\Delta=\lim_{\delta[\Delta]\to0}S_\Delta=\int_a^b(\psi(x)-c)\mathrm{d}x.$$

其中 $\delta[\Delta]$ 表示小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 的宽的最大值 $\max_k(x_k-x_{k-1})$. 另一方面, $(\mu_k-c)(x_k-x_{k-1})$ 是矩形 $\{(x,y)|x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, c\leqslant y\leqslant\mu_k\}$ 的面积, 所以若

$$A_\Delta=\bigcup_{k=1}^m\{(x,y)|x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, c\leqslant y\leqslant\mu_k\},$$

则 s_Δ 是矩形块 A_Δ 的面积: $s_\Delta=\omega(A_\Delta)$. 同理, 若

$$B_\Delta=\bigcup_{k=1}^m\{(x,y)|x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, c\leqslant y\leqslant\mathrm{M}_k\},$$

则 $S_\Delta=\omega(B_\Delta)$. A_Δ 和 B_Δ 都是闭区域, 并且

$$A_\Delta\subset K\subset B_\Delta.$$

所以

$$\omega(A_\Delta)\leqslant\omega(K)\leqslant\omega(B_\Delta),$$

即

$$s_\Delta \leqslant \omega(K) \leqslant S_\Delta.$$

因此 (7.48) 式成立.

其次, 为了证明 (7.47) 式, 取常数 d, 使得 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 恒有 $\psi(x) < d$, 并且令

$$H = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$
$$L = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, \quad \psi(x) \leqslant y \leqslant d\},$$
$$C = \{(x,\psi(x))|a \leqslant x \leqslant b\}.$$

曲线 C 是函数 ψ 的图像, C 将矩形 H 分割成两个闭区域 K 和 L: $H = K \cup L, K \cap L = C$. 若令

$$g(x) = f(x,\psi(x)),$$

则 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的关于 x 的连续函数. 因此, 若令

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant \psi(x) \quad \text{时} \quad \tilde{f}(x,y) = f(x,y), \\ a \leqslant x \leqslant b, \quad \psi(x) \leqslant y \leqslant d \quad \text{时} \quad \tilde{f}(x,y) = g(x), \end{cases}$$

则在曲线 C 上 $f(x,y)$ 和 $g(x)$ 一致, 所以可以将定义在 K 上的连续函数 $f(x,y)$ 延拓为定义在 H 上的连续函数 $f(x,y)$. 令 $\Phi(x,y) = \int_c^y \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y$, 则根据定理 6.20 的 (1), $\Phi(x,y)$ 是 H 上的两个变量 x,y 的连续函数. 因此

$$\int_c^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{\psi(x)} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y = \Phi(x,\psi(x))$$

是关于 x 的连续函数. 另外根据用累次积分表示的二重积分的公式 (7.11) 式,

$$\int_H \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y.$$

因为矩形 H 被分割成两个闭区域 K 和 L, 所以 $\tilde{f}(x,y)$ 在 K 上与 $f(x,y)$ 一致, 在 L 上与 $g(x)$ 一致, 因此根据定理 7.7,

$$\int_H \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_L g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又因为 $\int_{\psi(x)}^d g(x)\mathrm{d}y = g(x)(d-\psi(x))$, 所以

$$\int_c^d \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y + g(x)(d-\psi(x)),$$

所以,

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_a^b g(x)(d-\psi(x))\mathrm{d}x.$$

因此若要证明 (7.47) 式, 只须证明

$$\int_L g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b g(x)(d-\psi(x))\mathrm{d}x$$

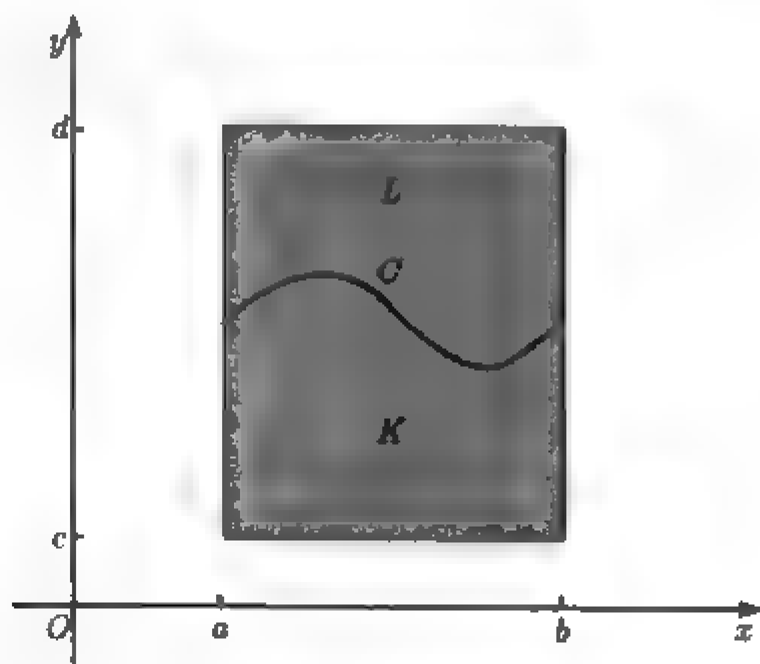
即可. 为此, 根据定理 7.7 和 (7.11) 式,

$$\int_K g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_H g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b g(x)(d-c)\mathrm{d}x,$$

所以只须证明

$$\int_K g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x \tag{7.49}$$

即可.



考虑闭区间 $[a,b]$ 的分割 $\Delta=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\}, a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$, 并且对应于分割 Δ, 将闭区域 K 分割成 m 个闭区域

$$K_k=\{(x,y)|x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k, c\leqslant y\leqslant\psi(x)\},\quad k=1,2,\cdots,m.$$

则 (7.49) 式的右边

$$\int_a^b g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^m\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x,$$

再根据推广的中值定理 (定理 4.3), 存在 ξ_k 满足

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x = g(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k} (\psi(x)-c)\mathrm{d}x, \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k,$$

所以根据 (7.48) 式,

$$\int_a^b g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m g(\xi_k)\omega(K_k) = \sum_{k=1}^m g(\xi_k)\int_{K_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面, 根据定理 7.7, (7.49) 式的左边

$$\int_K g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^m \int_{K_k} g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此

$$\int_K g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_a^b g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^m \int_{K_k}(g(x)-g(\xi_k))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续, 所以对于任意的正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$\text{只要 } |x-\xi| < \delta(\varepsilon), \quad \text{就有} \quad |g(x)-g(\xi)| < \varepsilon.$$

若取分割 Δ, 使得 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$, 则根据 (7.44) 式

$$\left|\int_{K_k}(g(x)-g(\xi_k))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| < \varepsilon\omega(K_k).$$

因此

$$\left|\int_K g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_a^b g(x)(\psi(x)-c)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\sum_{k=1}^m \omega(K_k) = \varepsilon\omega(K),$$

其中 ε 是任意的正实数. 所以等式 (7.49) 成立. □

上述定理 7.10 中 K 可以推广到更一般的闭领域的情况.

推论　设 $\psi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 并且在开区间 (a,b) 上满足 $\psi(x) > \varphi(x)$ 的关于 x 的函数. 令

$$K = \{(x,y)|a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

如果 $f(x,y)$ 是定义在闭领域 K 上的连续函数, 则

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{7.50}$$

证明 设 c 是 $[a,b]$ 上使 $\varphi(x)>c$ 的常数, 若

$$H=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant\psi(x)\},$$
$$L=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant\varphi(x)\},$$

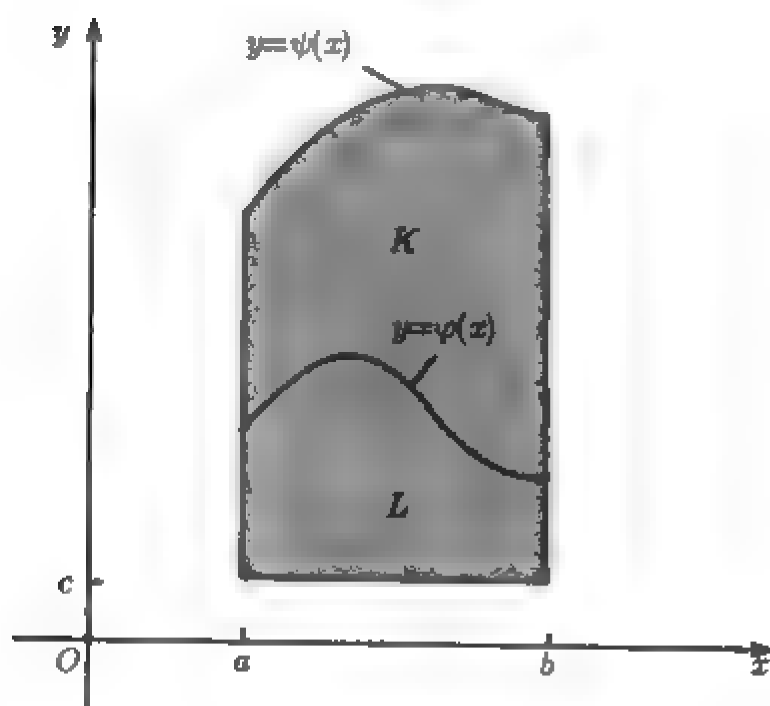
则 H 和 L 都是闭区域, 并且 H 被分割成 K 和 L. 令 $(x,y)\in K$ 时, $\tilde{f}(x,y)=f(x,y)$; $(x,y)\in L$ 时, $\tilde{f}(x,y)=f(x,\varphi(x))$, 并且将连续函数 $f(x,y)$ 延拓到 H 上的连续函数 $\tilde{f}(x,y)$. 则根据定理 7.10,

$$\int_H\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{\psi(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y,$$
$$\int_L\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^{\varphi(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y,$$

所以根据定理 7.7,

$$\begin{aligned}\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_H\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_L\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\left(\int_c^{\psi(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{\varphi(x)}\tilde{f}(x,y)\mathrm{d}y\right)\\&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□



若在 (7.50) 式中令 $f(x,y)=1$, 则得

$$\omega(K)=\int_a^b(\psi(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x. \tag{7.51}$$

这也就是高中数学中学过的闭区域 K 的面积用一重积分来表示的公式.

7.3　积分变量的变换

一元函数的定积分计算中关于积分变量变换的换元积分公式 (4.56) 非常重要. 该公式在一定条件下可以推广到二重积分的情况.

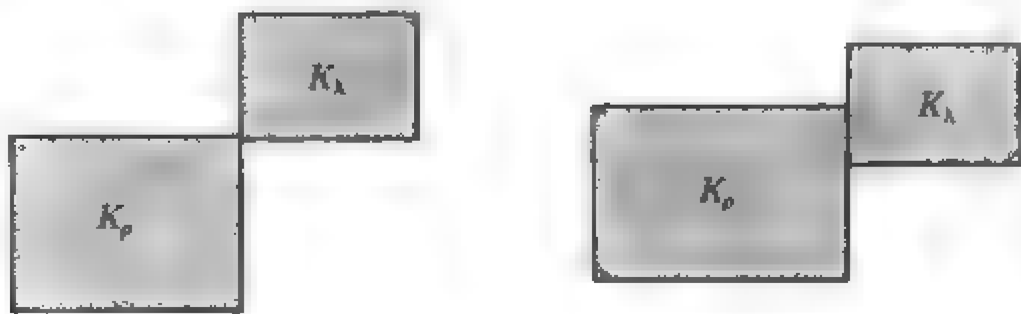
a) 预备性的考察

设 D 是平面上的领域, $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数. 根据 7.2 节 a) 中所述的广义积分的定义, 对于从内部收敛于 D 的一个矩形块序列$\{A_m\}$, 当 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{A_m}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$ 时, 广义积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛, 其值为

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此时能够选取矩形块序列$\{A_m\}$, 使得各矩形块 A_m 是闭领域, 即开核 (A_m) 是连通开集.

[证明] 从有限个矩形的考察开始. 对于给定的任意两个都没有公共内点的有限个矩形 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$, 若 $K_\rho \cap K_\lambda \neq \varnothing(\rho \neq \lambda)$, 则 $K_\rho \cap K_\lambda$ 或是由一点构成或者是一条线段. 如果在 $K_1, K_2, \cdots, K_\lambda, \cdots, K_\nu$ 中有与 K_0 有公共线段的项, 设其中之一为 K_{λ_1}. 如果在 $K_\lambda(\lambda \neq 0,\ \lambda \neq \lambda_1)$ 中存在与 K_0 或者 K_{λ_1} 有公共线段的项, 设其中之一是 K_{λ_2}; 如果在 $K_\lambda(\lambda \neq 0,\ \lambda \neq \lambda_1,\ \lambda \neq \lambda_2)$ 中存在与 K_0, K_{λ_1} 或 K_{λ_2} 有公共线段的项, 设其中之一是 K_{λ_3}. 以此类推, 可得 $K_{\lambda_4}, K_{\lambda_5}, \cdots$ 直至 K_{λ_p}, 虽然 K_{λ_p} 与 $K_0, K_{\lambda_1}, K_{\lambda_2}, \cdots, K_{\lambda_{p-1}}$ 之一有公共线段, 但是 $K_\lambda(\lambda \neq 0,\ \lambda \neq \lambda_1,\ \cdots, \lambda \neq \lambda_p)$ 与所有的 $K_0, K_{\lambda_1}, K_{\lambda_2}, \cdots, K_{\lambda_p}$ 都没有公共线段. 为方便起见, 将 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$ 变换排列顺序使得 $K_{\lambda_1} = K_1$, $K_{\lambda_2} = K_2, \cdots, K_{\lambda_p} = K_p$. 即当 $\lambda = 1, 2, \cdots, p$ 时, K_λ 与 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_{\lambda-1}$ 之一有公共线段; 当 $\lambda = p+1, p+2, \cdots, \nu$ 时, K_λ 和 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_p$ 都没有公共线段①. 此结果归纳为如下引理:



引理 7.3　设 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_\nu$ 是给定的任意两个都没有公共内点的有限个矩形. 若将 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$ 适当地变换排列顺序, 并且将它重新记为 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$,

① 当然根据情况不同有时 $p = \nu$.

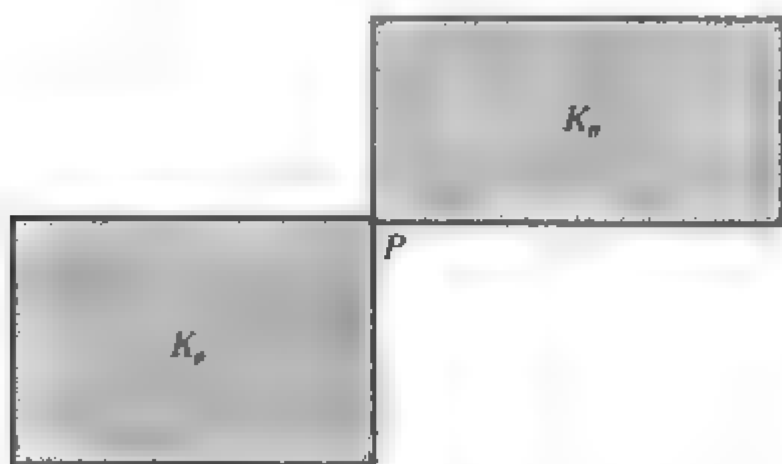
则当 $\lambda=1,2,\cdots,p$ 时, K_λ 与 $K_0,K_1,\cdots,K_{\lambda-1}$ 有公共线段; 当 $\lambda=p+1,\cdots,\nu$ 时, K_λ 与 $K_0,K_1,\cdots,K_p$ 都没有公共线段.

假设矩形块 A 和其一个内点 P_0, $P_0\in(A)$ 给定. 如 7.1 节 d) 所述, A 是任意两个都没有公共内点的有限个矩形 $K_0,K_1,K_2,\cdots,K_\nu$ 的并集, 则根据引理 7.3, $P_0\in K_0$, 当 $\lambda=1,2,\cdots,p$ 时, K_λ 与 $K_0,K_1,\cdots,K_{\lambda-1}$ 之一有公共线段; 当 $\lambda=p+1,\cdots,\nu$ 时, K_λ 与 $K_0,K_1,\cdots,K_p$ 都没有公共线段. 令

$$A_0=K_0\cup K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_p,$$
$$A_1=K_{p+1}\cup K_{p+2}\cup\cdots\cup K_\nu.$$

若 K_λ 与 K_ρ 有公共线段, 则 $K_\lambda\cup K_\rho$ 的开核 $(K_\lambda\cup K_\rho)$ 是连通开集, 所以 A_0 的开核 (A_0) 是连通开集, 即 (A_0) 是领域, 从而 A_0 是闭区域. 显然, $A=A_0\cup A_1$, 并且 $A_0\cap A_1$ 是由至多有限个点组成的集合. 若 $P\in A_0\cap A_1$, 则 P 是 A 的边界点. 这是因为, 若 $P\in K_\rho\subset A_0$, $P\in K_\sigma\subset A_1$, 则 $K_\rho\cap K_\sigma=\{P\}$, 并且除 K_ρ, K_σ 以外的 K_λ 不包含点 P. 因此

$$(A)=(A_0)\cup(A_1),\quad (A_0)\cap(A_1)=\varnothing. \tag{7.52}$$



一般地, 给定平面上的开集 W 和点 $P_0\in W$ 时, 若把 W 内能够通过折线与点 P_0 连接的点 $P\in W$ 的全体的集合设为 W_0, 则根据前面的证明结果, W_0 是 W 的包含 P_0 的最大连通开子集. 即 $W_0\subset W$ 是包含 P_0 的连通开集, 并且包含满足 $P_0\in V\subset W$ 的所有连通开集 V: $V\subset W_0$. 包含此 P_0 的 W 的最大连通开子集 W_0 称为 W 的包含 P_0 的**连通分支**(connected component).

上述的 (A_0) 是 (A) 的包含 P_0 的连通分支. 这是因为, 对于给定的连通开集 V, $P_0\in V\subset(A)$, 若令 $V_0=V\cap(A_0)$, $V_1=V\cap(A_1)$, 则 V_0, V_1 都是开集, $P_0\in V_0$, 并且根据 (7.52) 式, $V=V_0\cup V_1$, $V_0\cap V_1=\varnothing$, 所以 $V_1=\varnothing$, $V=V_0\subset(A_0)$. 因此 $A_0=[(A_0)]$ 的确定与把 A 分割为有限个矩形 $K_0,K_1,\cdots,K_\nu$ 的分割方法无关. 为方便起见, 本节中称A_0 为矩形块 A 的包含 P_0 的分支.

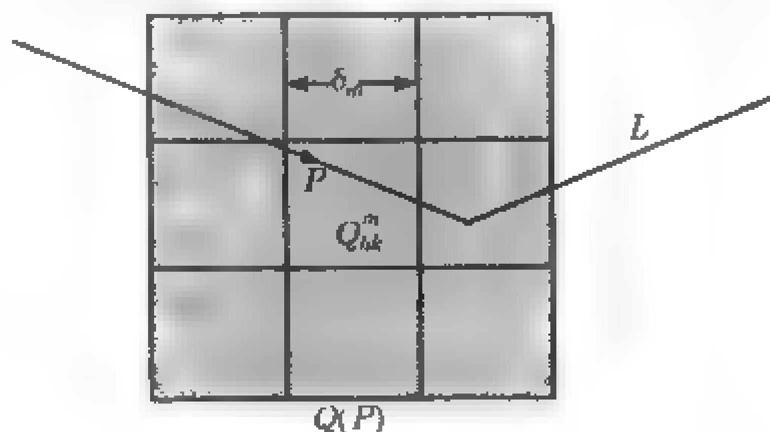
对于给定的领域 D, 设 $\{A_m\}$ 是 7.2 节 a) 中导入的从内部单调地收敛于 D 的典型的矩形块序列. 即 Q^m_{hk} 作为 (7.22) 式的正方形, 当 D 有界时, A_m 定义为包含于 D 的 Q^m_{hk} 的并集; 当 D 无界时, A_m 定义为包含于 $D\cap\{(x,y)\,|\,|x|<m, |y|<m\}$ 的 Q^m_{hk} 的并集. 这样确定的矩形块序列的最初几项 $A_1, A_2, \cdots$ 可能是 $\varnothing$, 这种情况下, 可以令不为 $\varnothing$ 的第一项为 A_e, 将 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 用 $A_e, A_{e+1}, A_{e+2}, \cdots$ 代替即可. 为方便起见, 考察 $A_1 \neq \varnothing$ 的情况.

设 P_0 是 A_1 的一个内点. 因为 $P_0 \in (A_1) \subset (A_m)$, 所以对于每个自然数 m, 存在矩形块 A_m 的包含 P_0 的分支 A_{m0}. 当 $m < n$ 时, $(A_m) \subset (A_n)$, 所以若取 (A_m), (A_n) 的包含 P_0 的连通分支, 则 $(A_{m0}) \subset (A_{n0})$. 因此

$$A_{10} \subset A_{20} \subset \cdots \subset A_{m0} \subset \cdots, \quad A_{m0} \subset D.$$

从而要证明矩形块序列 $\{A_{m0}\}$ 从内部单调收敛于 D, 只须证明 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (A_{m0}) = D$ 即可. 为此若任取点 $P_1 \in D$, 则因为 D 是连通开集, 所以 P_0 和 P_1 可以通过 D 内的折线 L 连接. 若取正实数 ε 充分小, 则对于 L 上的每一点 P, P 的 ε 邻域 $U_\varepsilon(P)$ 包含于 D: $U_\varepsilon(P) \subset D$. 为了验证此事, 无论取多么小的 ε 我们都假定存在满足 $U_\varepsilon(P) \not\subset D$ 的点 $P \in L$. 则对于每一个自然数 n 都存在满足 $U_{1/n}(P_n) \not\subset D$ 的点 $P_n \in L$. 因为点列 $\{P_n\}$ 有界, 所以它具有收敛的子列 $\{P_{n_j}\}$, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ (定理 1.30). 若令该极限为 $P_\infty = \lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j}$, 则 $P_\infty \in L \subset D$, 所以存在满足 $U_\varepsilon(P_\infty) \subset D$ 的 ε, $\varepsilon > 0$. 若 j 取充分大, 则有 $P_{n_j} \in U_{\varepsilon/2}(P_\infty)$, $1/n_j < \varepsilon/2$, 从而 $U_{1/n_j}(P_{n_j}) \subset U_\varepsilon(P_\infty) \subset D$, 与 $U_{1/n}(P_n) \not\subset D$ 矛盾.

因此, 若取充分小的 ε, $\varepsilon > 0$, 则对于每一点 $P \in L$ 都有 $U_\varepsilon(P) \subset D$. 对于该 ε, 取 m 使得 $\delta_m = 1/2^m < \varepsilon/3$. P 包含于某个正方形 Q^m_{hk}: $P \in Q^m_{hk}$. 若令 $Q(P)$ 是与该正方形 Q^m_{hk} 有公共点的 9 个正方形 Q^m_{ij}, $i = h-1, h, h+1$, $j = k-1, k, k+1$ 的并集, 则 $Q(P) \subset U_\varepsilon(P) \subset D$, 所以 $Q(P) \subset A_m$. 又因为 P 是正方形 $Q(P)$ 的内点, 所以 $P \in (A_m)$, 因此 $L \subset (A_m)$. 故 $P_1 \in (A_{m0})$, 其中 P_1 是属于 D 的任意点. 从而对于任意点 $P \in D$, 当取充分大的自然数 m 时, $P \in (A_{m0})$. 所以 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (A_{m0}) = D$.



即 $\{A_{m0}\}$ 是从内部单调收敛于 D 的矩形块序列, 并且每个矩形块 A_{m0} 都为闭区域. □

上述的每个闭区域 A_{m0} 都是满足 $Q_{hk}^m \subset A_{m0}$ 的正方形 Q_{hk}^m 的并集. 所以若将满足 $Q_{hk}^1 \subset A_{10}$ 的正方形 Q_{hk}^1 排成一列并且用 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n_1}$ 表示, 则

$$A_{10} = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{n_1}.$$

若将满足 $Q_{hk}^2 \subset A_{20}$, $Q_{hk}^2 \not\subset A_{10}$ 的正方形 Q_{hk}^2 排成一列并且用 $Q_{n_1+1}, Q_{n_1+2}, \cdots, Q_{n_2}$ 表示, 则

$$A_{20} = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{n_1} \cup Q_{n_1+1} \cup \cdots \cup Q_{n_2}.$$

一般地, 若将满足 $Q_{hk}^m \subset A_{m0}$, $Q_{hk}^m \not\subset A_{(m-1)0}$ 的正方形 Q_{hk}^m 排成一列并且用 $Q_{n_{m-1}+1}, \cdots, Q_{n_m}$ 表示, 则

$$A_{m0} = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{n_{m-1}} \cup \cdots \cup Q_{n_m}.$$

以此类推, 若 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ 确定, 则显然有

$$D = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup \cdots \cup Q_n \cup \cdots.$$

此时适当地调整 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots$ 的顺序, 使得关于每个 n 的部分和 $Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n$ 可以成为闭区域.

[证明] 设引理 7.3 中给出的矩形 $K_0, K_1, \cdots, K_\nu$ 排列成: 对于 ρ, $\rho < \nu$, 当 $\lambda = 1, 2, \cdots, \rho$ 时, K_λ 与 $K_0, K_1, \cdots, K_{\lambda-1}$ 之一有公共线段. 若 $K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_\nu$ 是闭区域, 则只要将剩下的 $K_{\rho+1}, K_{\rho+2}, \cdots, K_\nu$ 适当地变换顺序重新排列, 对于 $\lambda = \rho + 1, \cdots, \nu$, 就能够使 K_λ 与 $K_0, K_1, \cdots, K_{\lambda-1}$ 有公共线段. 这是因为, 根据引理 7.3 的证明过程, 若假设以上不能成立, 则对于某一个 p, $\rho \leqslant p < \nu$, 当 $\lambda = p+1, p+2, \cdots, \nu$ 时, K_λ 与 $K_0, K_1, \cdots, K_p$ 中的任何一个都没有公共线段, 从而 $(K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_\nu)$ 被分割成两个没有任何公共点的开集 $(K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_p)$ 和 $(K_{p+1} \cup \cdots \cup K_\nu)$.

因为 $A_{10} = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_{n_1}$ 是闭区域, 所以适用于上述的结论. 首先将 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n_1}$ 排列成使每一个 $Q_\lambda (\lambda = 2, \cdots, n_1)$ 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{\lambda-1}$ 都有公共线段. 其次, 因为 $A_{20} = Q_1 \cup \cdots \cup Q_{n_1} \cup \cdots \cup Q_{n_2}$ 是闭区域, 所以变换 $Q_{n_1+1}, \cdots, Q_{n_2}$ 的排列顺序使得 $Q_\lambda (\lambda = n_1 + 1, \cdots, n_2)$ 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{\lambda-1}$ 都有公共线段. 以下同理, 对于每一个 $m = 3, 4, 5, \cdots$ 将 $Q_{n_{m-1}+1}, \cdots, Q_{n_m}$ 变换排列可得, Q_n 与 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n-1}$ 都有公共线段. 因此, 部分和 $Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n$ 是闭区域. 若

$$A_n = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n,$$

则 $A_{m0} = A_{n_m}$, 所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_n) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(A_{m0}) = D$. 即下面的引理成立:

引理 7.4 对于平面上的领域 D, 存在满足下面三个条件的正方形 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n, \cdots$:

(1) $D = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup \cdots \cup Q_n \cup \cdots, (Q_m) \cap (Q_n) = \varnothing \quad (m \neq n)$;

(2) 矩形块 $A_n = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_n$ 是闭区域;

(3) 矩形块序列 $\{A_n\}$ 从内部单调收敛于 D.

此时, 对于 D 上的任意连续函数 $f(x, y)$, 根据 (7.16) 式,

$$\int_{A_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{m}\int_{Q_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{Q_n} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{Q_n} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$, 则广义积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛, 并且

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{Q_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.53}$$

一般地, 对于平面上满足下列两个条件的领域 D:

(1) $H_n = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ 都是闭区域;

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(H_n) = D$.

若 D 可表示为无穷多个闭区域 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n, \cdots$ 的并集,

$$D = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n \cup \cdots, \quad (K_m) \cap (K_n) = \varnothing \quad (m \neq n),$$

那么就称 D被分割成闭区域 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n, \cdots$. 引理 7.4 表明了任意的领域 D 都可以被正方形 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n, \cdots$ 所分割.

定理 7.11 设领域 D 被闭区域 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_n, \cdots$ 分割. 如果 $f(x, y)$ 是 D 上的连续函数, 那么

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.54}$$

广义积分 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{K_n} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$ 时绝对收敛, 并且

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.55}$$

证明 设 $f(P)=f(x,y), P=(x,y)$. 因为 $H_m=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m$ 是闭区域, 所以根据定理 7.7 和 (7.32) 式,

$$\sum_{n=1}^{m}\int_{K_n}|f(P)|\mathrm{d}\omega=\int_{H_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega=\int_{(H_m)}|f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n}|f(P)|\mathrm{d}\omega=\lim_{m\to\infty}\int_{(H_m)}|f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.56}$$

另一方面, 若 $\{A_n\}$ 是从内部单调收敛于 D 的矩形块序列, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|f(P)|\mathrm{d}\omega=\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

A_n 是有界闭集且 $A_n\subset D=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(H_m)$, 所以根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), 每一个 A_n 被有限个 (H_m) 所覆盖:

$$A_n\subset(H_1)\cup(H_2)\cup\cdots\cup(H_{m_n})=(H_{m_n}),$$

所以

$$\int_{A_n}|f(P)|\mathrm{d}\omega\leqslant\int_{(H_{m_n})}|f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

因此

$$\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega\leqslant\lim_{m\to\infty}\int_{(H_m)}|f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{7.57}$$

当 $\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega=+\infty$ 时, 从 (7.56) 式可以得到 (7.54) 式. 当 $\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega<+\infty$ 时, 因为 $(H_m)\subset D$, 则根据 (7.27) 式,

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega-\int_{(H_m)}f(P)\mathrm{d}\omega\right|\leqslant\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega-\int_{(H_m)}|f(P)|\mathrm{d}\omega.$$

从这不等式以及 (7.57) 式可得

$$\int_D|f(P)|\mathrm{d}\omega=\lim_{m\to\infty}\int_{(H_m)}|f(P)|\mathrm{d}\omega,$$

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega=\lim_{m\to\infty}\int_{(H_m)}f(P)\mathrm{d}\omega$$

所以根据 (7.56) 式, (7.54) 式成立. 因此由定理 7.7 和 (7.32) 式有,

$$\sum_{n=1}^{m}\int_{K_n}f(P)\mathrm{d}\omega=\int_{H_m}f(P)\mathrm{d}\omega=\int_{(H_m)}f(P)\mathrm{d}\omega,$$

故 (7.55) 式成立. □

b) 映射和坐标变换

一般地, 设 S, T 为集合, 如果每一个元素 $s \in S$ 分别与一个元素 $t \in T$ 相对应, 那么就称对应 $\varphi: s \to t = \varphi(s)$ 为从 S 到 T 的**映射**(mapping), 称 S 为映射 φ 的定义域, 称 $\varphi(S) = \{\varphi(s)|s \in S\}$ 为值域, 称 $t = \varphi(s)$ 为由映射 φ 得到的 s 的**像**(image). 当 $\varphi(S) = T$ 时, 称 φ 为 S 到 T 的**满射**. 此外, 对于 $\varphi: s \to t = \varphi(s)$ 是 S 到 T 的映射, $\psi: t \to u = \psi(t)$ 是 T 到 U 的映射, 称 $s \to u = \psi(\varphi(s))$ 为 φ 和 ψ 的**复合映射**, 并用 $\psi \circ \varphi$ 表示等, 这些都已在高中数学中学过. 对于 T 的任意子集 W, 满足 $\varphi(s) \in W$ 的 S 的元素 s 的全体的集合称为由 φ 得到的 **W的逆像**(invers image), 并用 $\varphi^{-1}(W)$ 表示:

$$\varphi^{-1}(W) = \{s \in S|\varphi(s) \in W\}.$$

对于 S 的任意子集 V, 显然 $\{\varphi(s)|s \in V\}$ 表示集合 $\varphi(V)$. 当 φ 是一一映射时, 对于每一个 $t \in \varphi(S)$, 存在唯一的 $s \in S$ 满足 $\varphi(s) = t$. 称此 s 为由 φ 得到的 t 的逆像, 用 $\varphi^{-1}(t)$ 表示: $s = \varphi^{-1}(t)$. 则

$$\varphi^{-1}: t \to s = \varphi^{-1}(t)$$

是以 $\varphi(S)$ 为定义域, S 为值域的映射. 称此映射 φ^{-1} 为 φ 的**逆映射**(inverse mapping).

如果 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ 是定义在平面上某个点集 E 上的两个变量 u, v 的二元函数, 则每一点 $(u, v) \in E$ 分别有一个点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ 与之相对应, 该对应

$$\Phi: (u, v) \to (x, y) = \Phi(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

显然这是 E 到 $\mathbf{R}^2$ 上的映射. 当 $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ 是两个变量 u, v 的二元连续函数时, 称 Φ 为**连续映射**(continuous mapping). 当 E 是领域, 并且 $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ 在 E 上连续可微时, 称 Φ 为**连续可微映射**或 **$\mathscr{C}^1$ 类映射**.

若 Φ 是定义在领域 E 上的连续映射, 则任意开集 W 的逆像 $\Phi^{-1}(W)$ 是开集[①]. [证明] 若 $\Phi^{-1}(W)$ 不是开集, 则 $\Phi^{-1}(W)$ 最少包含一个边界点. 假设该边界点为 (u_0, v_0), 则 $(x_0, y_0) = \Phi(u_0, v_0) \in W$. 又因为 $(u_0, v_0) \in \Phi^{-1}(W) \subset E$ 是 $\Phi^{-1}(W)$ 的边界点, 所以存在收敛于 (u_0, v_0) 的点列 $\{(u_n, v_n)\}, (u_n, v_n) \notin \Phi^{-1}(W), (u_n, v_n) \in E$. 根据假设, $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ 是连续函数, 若令 $(x_n, y_n) = \Phi(u_n, v_n)$, 则

$$(x_n, y_n) = (\varphi(u_n, v_n), \psi(u_n, v_n)) \to (x_0, y_0) \quad (n \to \infty).$$

① 对于任意的开集 $W \subset \mathbf{R}^2$, $\Phi^{-1}(W) = \{(u, v) \in E|\Phi(u, v) \in W\}$ 是开集.

另一方面, 因为 $(u_n, v_n) \notin \Phi^{-1}(W)$, 所以 $(x_n, y_n) = \Phi(u_n, v_n) \notin W$. 这与 W 是开集矛盾. □

当映射 $\Phi : (u,v) \to (x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ 在区域 E 上连续可微时, 根据 (6.14),

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathrm{d}u + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathrm{d}v. \end{cases}$$

称上式右侧 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 的系数矩阵 $\begin{bmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{bmatrix}$ 为映射 Φ 的**雅可比矩阵**(Jacobian matrix), 其行列式

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix}$$

称为**函数行列式**(function determinant), 或者**雅可比式**(Jacobian). 函数行列式用

$$\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

等符号表示[①]. 若 $\Phi : (u,v) \to (x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ 在领域 E 上连续可微, $\Psi : (x,y) \to (w,z) = (\omega(x,y), \zeta(x,y))$ 在领域 D 上连续可微且 $\Phi(E) \subset D$, 则根据定理 6.21, 复合映射

$$\Psi \circ \Phi : (u,v) \to (w,z) = (\omega(\varphi(u,v), \psi(u,v)), \zeta(\varphi(u,v), \psi(u,v))).$$

在 E 上连续可微, 并且根据 (6.24) 式,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial u} & \dfrac{\partial w}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

等式两边若取行列式, 则

$$\frac{\partial(w,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(w,z)}{\partial(x,y)} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \tag{7.58}$$

① 表示函数行列式的符号并不固定. 也有人将雅可比矩阵用 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 表示, 而将函数行列式写成 $\det \partial(x,y)/\partial(u,v)$.

特别地, 若 Ψ 是 Φ 的逆映射, 则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1. \tag{7.59}$$

定理 7.12 设 $\Phi:(u,v)\to(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 是从领域 E 到 $\mathbf{R}^2$ 的连续可微映射, $J(u,v)=\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u$ 是其函数行列式. 那么在点 $(u_0,v_0)\in E$ 处, 若 $J(u_0,v_0)\neq 0$, 则 Φ 是 (u_0,v_0) 的充分小邻域 $U\subset E$ 到 $(x_0,y_0)=\Phi(u_0,v_0)$ 的一个邻域 W 的一一映射. 并且若将 Φ 的定义域限制到 U, 则 Φ 的逆映射 Φ^{-1}① 在 W 上连续可微.

为了证明此定理, 我们将映射 $\Phi:(u,v)\to(x,y)$ 看作 $\Phi_1:(u,v)\to(x,v)$ 和 $\Phi_2(x,v)\to(x,y)$ 的复合映射 $\Phi_2\circ\Phi_1$, 并且先证明下面的引理.

引理 7.5 如果 $\varphi(u,v)$ 在矩形 $K=\{(u,v)\,|a\leqslant u\leqslant b, c\leqslant v\leqslant d\}$ 上连续可微, 并且恒有 $\varphi_u(u,v)>0$, 则

$$\Phi_1:(u,v)\to(x,v)=(\varphi(u,v),v)$$

是从 K 到闭区域

$$H=\{(x,v)|\varphi(a,v)\leqslant x\leqslant\varphi(b,v),\quad c\leqslant v\leqslant d\}$$

的连续一一映射, 其逆映射是用定义在 H 上的连续函数 $\lambda(x,v)$ 表示为

$$\Phi_1^{-1}:(x,v)\to(u,v)=(\lambda(x,v),v)$$

的连续映射. Φ_1 在 (K) 上连续可微, Φ_1^{-1} 在 (H) 上连续可微, 即 $\lambda(x,v)$ 是 (H) 上的连续可微函数.

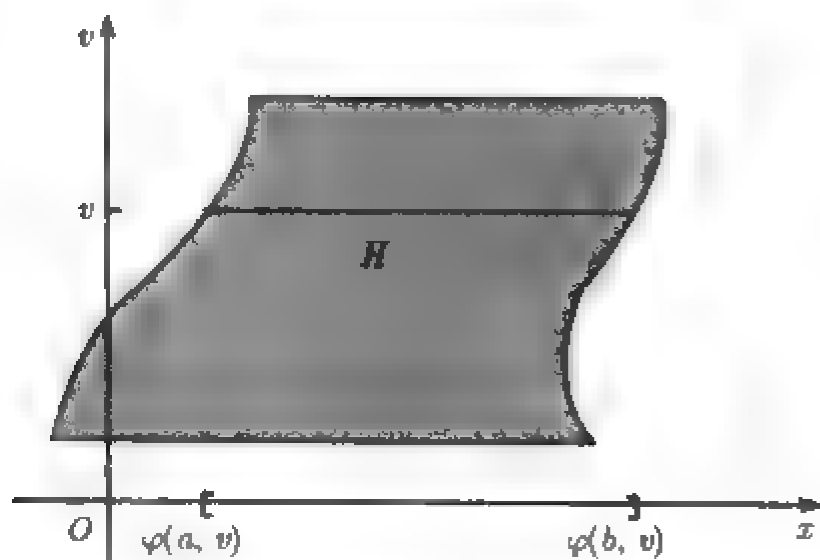
证明 若固定 v, 因为已知 $\varphi_u(u,v)>0$, 所以 $x=\varphi(u,v)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的 u 的连续可微的单调递增函数. 所以根据定理 2.6, 其值域为闭区间 $[\varphi(a,v),\varphi(b,v)]$, 再根据定理 2.7 和定理 3.4, 其反函数 $u=\lambda(x,v)$ 是定义在 $[\varphi(a,v),\varphi(b,v)]$ 上的关于 x 的连续可微的单调递增函数, 并且

$$\lambda_x(x,v)=\frac{1}{\varphi_u(u,v)},\quad u=\lambda(x,v). \tag{7.60}$$

因为 $x=\varphi(u,v)$ 的值域为 $[\varphi(a,v),\varphi(b,v)]$, 所以 $\Phi_1:(u,v)\to(x,v)=(\varphi(u,v),v)$ 的值域为闭区域 H. 根据 $\lambda(x,v)$ 的定义, $\lambda(\varphi(u,v),v)=u$, 所以 $(x,v)\to(u,v)=(\lambda(x,v),v)$ 是 Φ_1 的逆映射:

$$\Phi_1^{-1}:(x,v)\to(u,v)=(\lambda(x,v),v).$$

① 虽然应该写成"Φ_U 的逆映射 Φ_U^{-1}", 但是为了避开复杂的符号将 Φ_U 用表示相同含义的符号 Φ 来表示



为了验证 $\lambda(x,v)$ 是 H 上的两个变量 x,y 的二元连续函数, 我们假设 $\lambda(x,v)$ 在点 $(x_*,v_*)\in H$ 处不连续, 则对于某一个正实数 ε, 存在收敛于 (x_*,v_*) 的点列 $\{(x_n,v_n)\},(x_n,v_n)\in H$, 使得

$$|\lambda(x_n,v_n)-\lambda(x_*,v_*)|\geqslant\varepsilon.$$

若令 $u_n=\lambda(x_n,v_n)$, 则因为 $a\leqslant u_n\leqslant b$, 所以根据定理 1.30, $\{u_n\}$ 具有收敛的子列 $\{u_{n_j}\},n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$. 设该极限为 $c=\lim\limits_{j\to\infty}u_{n_j}$, 并且令 $u_*=\lambda(x_*,v_*)$, 则

$$|c-u_*|=\lim_{j\to\infty}|u_{n_j}-u_*|\geqslant\varepsilon.$$

另一方面, 若 $u=\lambda(x,v)$, 则 $x=\varphi(u,v)$, 所以 $x_{n_j}=\varphi(u_{n_j},v_{n_j}),x_*=\varphi(u_*,v_*)$. 因此 $\varphi(u,v)$ 是连续函数, 从而

$$x_*=\lim_{j\to\infty}x_{n_j}=\lim_{j\to\infty}\varphi(u_{n_j},v_{n_j})=\varphi(c,v_*).$$

即 $\varphi(u_*,v_*)=\varphi(c,v_*),c\neq u_*$. 这与 $\varphi(u,v)$ 是关于 u 的单调递增函数矛盾. 因此 $\lambda(x,v)$ 是关于变量 x,v 的二元连续函数.

根据 (7.60) 式, $\lambda(x,v)$ 关于 x 可偏微, $\lambda_x(x,v)$ 是关于变量 x,v 的二元连续函数. 为了证明 $u=\lambda(x,v)$ 在 (H) 上关于 v 可偏微, 对应于 v 的增量 Δv 取 u 的增量为 Δu: $u+\Delta u=\lambda(x,v+\Delta v)$, 则

$$x=\varphi(u,v)=\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v),$$

所以

$$\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v)-\varphi(u,v)=0,$$

因此根据 Taylor 公式 (6.28),

$$\varphi_u(u+\theta\Delta u,v+\theta\Delta v)\Delta u+\varphi_v(u+\theta\Delta u,v+\theta\Delta v)\Delta v=0,\quad 0<\theta<1.$$

$u=\lambda(x,v)$ 是关于 x,v 的二元连续函数, 所以当 $\Delta v\to 0$ 时 $\Delta u\to 0$. 因此

$$\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v}=-\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\varphi_v(u+\theta\Delta u,v+\theta\Delta v)}{\varphi_u(u+\theta\Delta u,v+\theta\Delta v)}=-\frac{\varphi_v(u,v)}{\varphi_u(u,v)},$$

即, $\lambda(x,v)$ 在 (H) 上关于 v 可偏微, 并且

$$\lambda_v(x,v)=-\frac{\varphi_v(u,v)}{\varphi_u(u,v)},\quad u=\lambda(x,v). \tag{7.61}$$

故 $\lambda_v(x,v)$ 是 (H) 上的两个变量 x,v 的连续函数, 从而 $\lambda(x,v)$ 是 (H) 上关于 x,v 的二元连续可微函数. □

当在 K 上恒有 $\varphi_u(u,v)<0$ 时, 若令 $H=\{(x,v)|\varphi(b,v)\leqslant x\leqslant\varphi(a,v),c\leqslant v\leqslant d\}$, 则引理 7.5 依然成立.

定理 7.12 的证明 根据假设,

$$\varphi_u(u_0,v_0)\psi_v(u_0,v_0)-\varphi_v(u_0,v_0)\psi_u(u_0,v_0)=J(u_0,v_0)\neq 0,$$

所以 $\varphi_u(u_0,v_0),\varphi_v(u_0,v_0)$ 中至少有一个不为 0. 无论哪种情况都相同, 所以不妨设 $\varphi_u(u_0,v_0)\neq 0$. 则 $\varphi_u(u_0,v_0)<0$ 或者 $\varphi_u(u_0,v_0)>0$, 并且 $J(u_0,v_0)>0$ 或者 $J(u_0,v_0)<0$, 但是无论哪种情况都一样, 所以我们不妨考虑 $\varphi_u(u_0,v_0)>0$, $J(u_0,v_0)>0$ 的情况. 此时 $\varphi_u(u,v)$ 和 $J(u,v)$ 都在 E 上连续, 所以若取 (u_0,v_0) 的 ε 邻域 $U_\varepsilon((u_0,v_0))\subset E$, 当 $\varepsilon>0$ 充分小, 则在 $U_\varepsilon((u_0,v_0))$ 上恒有 $\varphi_u(u,v)>0$, $J(u,v)>0$. 取 $a=u_0-\varepsilon/2$, $b=u_0+\varepsilon/2$, $c=v_0-\varepsilon/2$, $d=v_0+\varepsilon/2$, 并且令

$$K=\{(u,v)|a\leqslant u\leqslant b,c\leqslant v\leqslant d\},$$

则 K 是以 (u_0,v_0) 为中心、ε 为边长的正方形, 并且 $K\subset U_\varepsilon((u_0,v_0))$. 因此根据引理 7.5,

$$\Phi_1:(u,v)\to(x,v)=(\varphi(u,v),v)$$

是 K 到闭区域 $H=\{(x,v)\,|\varphi(a,v)\leqslant x\leqslant\varphi(b,v),c\leqslant v\leqslant d\}$ 上的连续一一映射, 其逆映射

$$\Phi_1^{-1}:(x,v)\to(u,v)=(\lambda(x,v),v)$$

在 H 上连续, 在 (H) 上连续可微. 因为

$$\Phi:(u,v)\to(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

在 E 上连续可微, 所以

$$\Phi_2=\Phi\circ\Phi_1^{-1}:(x,v)\to(x,y)=(x,\psi(\lambda(x,v),v))$$

在 (H) 上连续可微. 若

$$\tau(x,v)=\psi(\lambda(x,v),v),$$

则 $\tau(x,v)$ 是 (H) 上的连续可微函数, 并且

$$\Phi_2:(x,v)\to(x,y)=(x,\tau(x,v)).$$

若令 $(x_0,v_0)=\Phi_1(u_0,v_0)=(\varphi(u_0,v_0),v_0)$, 则 $\varphi(a,v_0)<x_0<\varphi(b,v_0),c<v_0<d$, 所以 $(x_0,v_0)\in(H)$. 若对 $\tau(x,v)=\psi(\lambda(x,v),v)$ 关于 v 微分, 则根据 (7.61) 式,

$$\tau_v=\psi_u\lambda_v+\psi_v=\frac{(\varphi_u\psi_v-\varphi_v\psi_u)}{\varphi_u},$$

即得

$$\tau_v(x,v)=\frac{J(u,v)}{\varphi_u(u,v)},\quad u=\lambda(x,v). \tag{7.62}$$

因为 $J(u,v)>0,\varphi_u(u,v)>0$, 所以在 (H) 上恒有 $\tau_v(x,v)>0$. 取 (H) 内以 (x_0,v_0) 为中心的矩形

$$K_1=\{(x,v)|c_1\leqslant x\leqslant d_1,a_1\leqslant v\leqslant b_1\},$$

并且将 Φ_2 的定义域限制到 K_1 上, 将引理 7.5 中的 $u,v,x,\varphi(u,v)$ 分别替换成 v,x,y, $\tau(x,v)$, 再应用于 Φ_2, 则

$$\Phi_2:(x,v)\to(x,y)=(x,\tau(x,v))$$

是从 K_1 到闭区域

$$H_1=\{(x,y)|c_1\leqslant x\leqslant d_1,\tau(x,a_1)\leqslant y\leqslant\tau(x,b_1)\}$$

上将 (K_1) 映成 (H_1) 的连续的一一映射, 并且逆映射 $\Phi_2^{-1}:(x,y)\to(x,v)$ 在 H_1 上连续, 在 (H_1) 上连续可微. 因此, 由 Φ_1 得到的 (K_1) 的逆像:

$$U=\Phi_1^{-1}((K_1))=\{(u,v)|\lambda(c_1,v)<u<\lambda(d_1,v),a_1<v<b_1\}$$

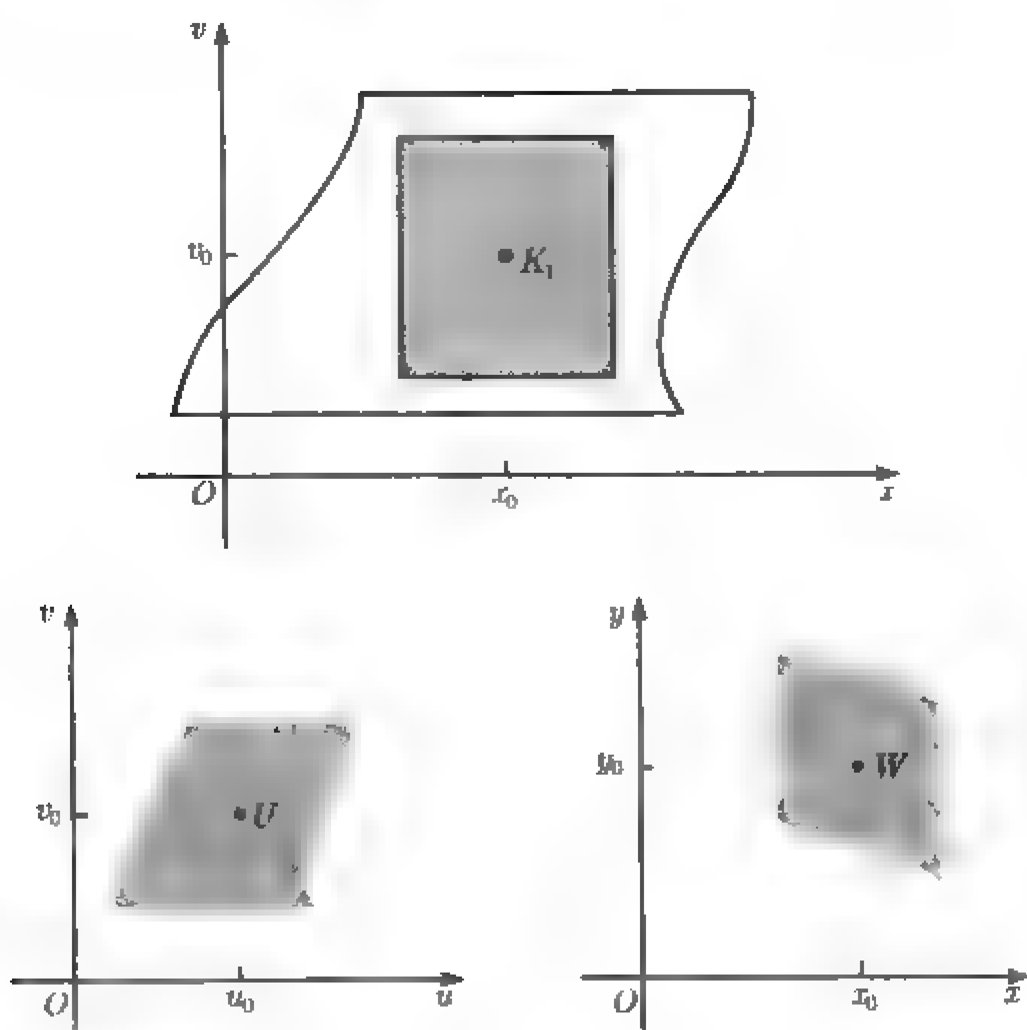
是包含 $(u_0,v_0)=\Phi_1^{-1}(x_0,v_0)$ 的领域, $\Phi=\Phi_2\circ\Phi_1$ 是从 U 到领域 $W=(H_1)$ 的映射. 并且若将 Φ 的定义域限制在 U 上, 则逆映射 $\Phi^{-1}=\Phi_1^{-1}\circ\Phi_2^{-1}$ 在 W 上连续可微. □

对于给定的领域 $D\subset\mathbf{R}^2$, 设

$$\Phi:(u,v)\to(x,y)=\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

是从领域 E 到 D上的连续可微的一一映射, 并且在每一点 $(u,v)\in E$ 处有

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq0.$$



则根据定理 7.12, 逆映射

$$\Phi^{-1}:(x,y)\to(u,v)=\Phi^{-1}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$$

也是连续可微的, 即 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 是 D 上关于 x,y 的二元连续可微函数. 若 Φ 作为实数对 $(u,v)\in E$ 和点 $P=(x,y)\in D$ 之间一一对应, 则 D 的每一点 $P=(x,y)$ 可以通过对应的 (u,v) 来确定, 所以可以把实数对 (u,v) 作为点 $P=(x,y)=\Phi(u,v)$ 的新坐标. 从而 $\Phi^{-1}:(x,y)\to(u,v)$ 成为将点 P 的原坐标 (x,y) 变为新坐标 (u,v) 的**坐标变换**(transformation of coordinates). 如果坐标 $(u,v), u=u(P)=u(x,y), v=v(P)=v(x,y)$ 与每一点 $P=(x,y)\in D$ 相对应, 那么称这个对应 $P\to(u,v)=(u(P),v(P))$ 为 D 上的**坐标系**[①] (system of coordinates). 如果称 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\,|-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$ 为 (x,y) 平面, $\mathbf{R}^2=\{(u,v)\,|-\infty<u<+\infty,-\infty<v<+\infty\}$ 是 (u,v) 平面, 则易知 Φ 是从 (u,v) 平面上的领域 E 到 (x,y) 平面上的领域 D 的映射. 同理, 称坐标系 $P\to(u,v)=(u(P),v(P))$ 为 (u,v) 系, 称坐标系 $P=(x,y)\to(x,y)$ 为 (x,y) 系.

例 7.2　设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b$ 是常数, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$, 若令

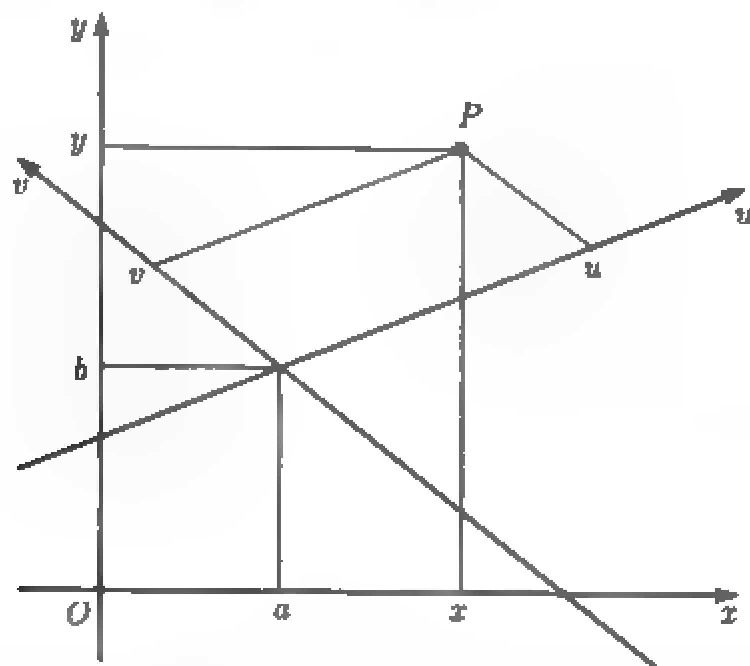
$$\begin{cases} x=\varphi(u,v)=\alpha u+\beta v+a, \\ y=\psi(u,v)=\gamma u+\delta v+b, \end{cases} \tag{7.63}$$

① 有时坐标系也简称为坐标.

则 $\Phi:(u,v)\to(x,y)$ 是从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 上的一一映射. 称映射 Φ 为**仿射变换**(affine transformation). Φ 的雅可比矩阵是 $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$, 函数行列式是 $J=\alpha\delta-\beta\gamma$. 关于 u,v, 解一次方程组 (7.63), 得

$$\begin{cases} u=\dfrac{\delta}{J}x-\dfrac{\beta}{J}y+\dfrac{-\delta a+\beta b}{J},\\ v=-\dfrac{\gamma}{J}x+\dfrac{\alpha}{J}y+\dfrac{\gamma a-\alpha b}{J}. \end{cases} \tag{7.64}$$

坐标变换: $(x,y)\to(u,v)$ 是由 (7.64) 式给出.



高中数学中首先涉及的是平面, 确定了平面上的坐标轴后我们首先考虑了该平面上的坐标系, 但本书中的平面定义为直积空间 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\,|\,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$, 所以在平面 $\mathbf{R}^2$ 上从一开始就确定了坐标系 $P=(x,y)\to(x,y)$. 除此以外的坐标系则必须根据坐标变换来定义.

例 7.3 如例 6.8 中所述, 当

$$\begin{cases} x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta, \end{cases}\quad 0\leqslant r<+\infty,$$

时, 称 (r,θ) 为点 $P=(x,y)$ 的**极坐标**(polar coordinates). 此时 $\Phi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 是从右半平面 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}=\{(r,\theta)\,|0<r<+\infty,-\infty<\theta<+\infty\}$ 到 $\mathbf{R}^2-\{0\}$ 上的连续可微的映射,

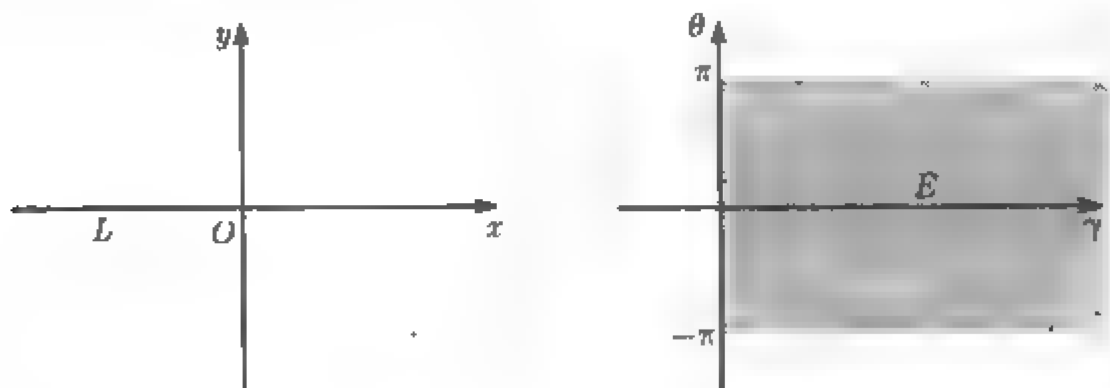
$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r>0.$$

因此, 根据定理 7.12, $\Phi:(r,\theta)\to(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 的每一点的充分小的邻域内是一一映射, 但是在 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 上却不是, 通过 Φ 有无穷多个点 $(r,\theta+2n\pi),n=$

$0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 与点 (x,y) 相对应. 所以 Φ 是指例如从领域

$$E = \{(r,\theta)|0 < r < +\infty, -\pi < \theta < \pi\}$$

到领域 $\mathbf{R}^2 - L, L = \{(x,0)\,|-\infty < x \leqslant 0\}$ 的一一映射. 从而, $P = (x,y) \to (r,\theta)$ 是领域 $\mathbf{R}^2 - L$ 上的坐标系.



c) 积分变量的变换

积分变换公式 (4.56)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

中, 当 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 时, 恒有 $\varphi'(t) > 0$ 的情况下, 如前面所述, 通过 $x = \varphi(t)$ 将闭区间 $[a,b]$ 的每一个点 x 与 $[\alpha,\beta]$ 的每一个点 t 一一对应, 所以可以将 t 作为点 $x = \varphi(t)$ 的新坐标考虑, 即 $\varphi^{-1} : x \to t = \varphi^{-1}(x)$ 可以看作是坐标变换. 本节中将这种情况下的积分变换公式推广到二重积分的情况.

设 $\Phi : (u,v) \to (x,y) = \Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ 是从 (u,v) 平面上的领域 E 到 (x,y) 平面上的领域 D 的一一的连续可微映射, 若在 E 上恒有

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix} > 0,$$

则, 如前项所述, 逆映射

$$\Phi^{-1} : (x,y) \to (u,v) = (u(x,y), v(x,y))$$

也连续可微, 并且 Φ^{-1} 是从 (x,y) 系到 (u,v) 系的坐标变换. 这时,

(1) 若 $U \subset E$[①]是开集, 则 $\Phi(U)$ 也是开集.

(2) 若 $U \subset E$ 是领域, 则 $\Phi(U)$ 也是领域.

(3) 若 $H \subset E$ 是有界闭领域, U 是 H 的开核, 则 $\Phi(H)$ 也是有界闭领域且 $\Phi(U)$ 是 $\Phi(H)$ 开核.

① "$U \subset E$" 可以读成 "E 的子集 U", "$\subset E$" 是形容点集 U 的形容词.

(4) 若 $C \subset E$ 是光滑曲线, 则 $\Phi(C)$ 也是光滑曲线.

(5) 若 $H \subset E$ 是包含由有限个光滑曲线组成边界的闭区域, 则 $\Phi(H)$ 也是闭区域, 若 H 的边界是 $\bigcup\limits_{k=1}^{m} C_k$, C_k 是光滑曲线, 则 $\Phi(H)$ 的边界为 $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \Phi(C_k)$, 每一个 $\Phi(C_k)$ 也是光滑曲线.

[证明] (1) 因为 $\Phi(U)$ 是作用在开集 U 上的连续映射 Φ^{-1} 的逆像 $(\Phi^{-1})^{-1}(U)$, 所以它是开集.

(2) 若开集 $\Phi(U)$ 是两个开集 V, W 的并集, 即用 $\Phi(U) = V \cup W$, $V \cap W = \varnothing$ 来表示, 则 $U = \Phi^{-1}(V) \cup \Phi^{-1}(W)$, $\Phi^{-1}(V) \cap \Phi^{-1}(W) = \varnothing$, 其中 $\Phi^{-1}(V)$ 和 $\Phi^{-1}(W)$ 都是开集. 因为 U 是领域, 即连通开集, 所以 $\Phi^{-1}(V) = \varnothing$ 或者 $\Phi^{-1}(W) = \varnothing$, 因此 $V = \varnothing$ 或者 $W = \varnothing$, 即 $\Phi(U)$ 是连通开集.

(3) 为了证明 $\Phi(H)$ 是有界闭集, 只须证明对于任意的点列 $\{P_n\}$, $P_n \in \Phi(H)$ 都存在收敛的子列 $\{P_{n_j}\}, n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$, 且 $\lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j} \in \Phi(H)$. 因为 $\Phi^{-1}(P_n) \in H$ 且 H 有界, 所以根据定理 1.30, 点列 $\{\Phi^{-1}(P_n)\}$ 有收敛的子列 $\{\Phi^{-1}(P_{n_j})\}$. 同时因为 H 是闭集, 所以 $Q = \lim\limits_{j\to\infty} \Phi^{-1}(P_{n_j}) \in H$. 因此 Φ 连续, 从而 $\lim\limits_{j\to\infty} P_{n_j} = \Phi(Q) \in \Phi(H)$, 即 $\Phi(H)$ 是有界闭集. 若 $U = (H)$ 和 $V = (\Phi(H))$ 分别是 H 和 $\Phi(H)$ 的开核, 则根据 (1), $\Phi(U)$ 是开集, 所以 $\Phi(U) \subset V \subset \Phi(H)$, 因此 $U \subset \Phi^{-1}(V) \subset H$, 同时因为 $\Phi^{-1}(V)$ 是开集且 U 是 H 的开核, 所以 $U = \Phi^{-1}(V)$, 因此 $\Phi(U) = V$, 即 $\Phi(U)$ 是 $\Phi(H)$ 的开核. 根据 (2), $\Phi(U)$ 是领域, 所以要证明 $\Phi(H)$ 是闭领域, 只须证明 $\Phi(H) = [\Phi(U)]$. 显然 $[\Phi(U)] \subset \Phi(H)$. 任取点 $P \in \Phi(H)$, 则 $\Phi^{-1}(P) \in H$, 又因为 H 是闭领域, 所以 $H = [U]$, 因此存在收敛于 $\Phi^{-1}(P)$ 的点列 $\{Q_n\}, Q_n \in U$. 因为 Φ 连续, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(Q_n) = \Phi(\lim\limits_{n\to\infty} Q_n) = \Phi(\Phi^{-1}(P)) = P$, $\Phi(Q_n) \in \Phi(U)$, 因此 $P \in [\Phi(U)]$. 从而 $\Phi(H) = [\Phi(U)]$.

(4) 若光滑曲线 C 的参数表示为 $C = \{P(t)\,|a \leqslant t \leqslant b\}$, $P(t) = (u(t), v(t))$, 则 $\{\Phi(P(t))\,|a \leqslant t \leqslant b\}$, $\Phi(P(t)) = (\varphi(t), \psi(t))$, $\varphi(t) = \varphi(u(t), v(t))$, $\psi(t) = \psi(u(t), v(t))$ 是 $\Phi(C)$ 的参数表示. 因为 $u(t), v(t)$ 是关于 $t(a \leqslant t \leqslant b)$ 的连续可微函数, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ 是关于 u, v 的连续可微函数, 所以根据定理 6.10 的推论, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 是关于 t 的连续可微函数, 并且根据 (6.18) 式,

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \varphi_u(u,v)u'(t) + \varphi_v(u,v)v'(t), \\ \psi'(t) = \psi_u(u,v)u'(t) + \psi_v(u,v)v'(t), \end{cases} \quad u = u(t), \quad v = v(t),$$

根据假设, $J(u,v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} > 0$ 且 $u'(t), v'(t)$ 不同时为 0, 所以 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 也不同时为 0. 因此 $\Phi(C)$ 是光滑曲线.

根据 (3) 和 (4), (5) 显然成立. □

若 $f(x,y)$ 是领域 $D=\Phi(E)$ 上的两个变量 x,y 的二元连续函数, 则复合函数 $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 是定义在 E 上的两个变量 u,v 的二元连续函数.

定理 7.13

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_E |f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{7.65}$$

并且 $\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$ 即 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛时,

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.66}$$

证明　应用本节 a) 中的引理 7.4, 将领域 E 分割成无数个正方形 $Q_1,Q_2,Q_3,\cdots,Q_n,\cdots$, 并且令 $K_n=\Phi(Q_n)$, 则根据上述 (5), 每一个 K_n 是闭区域, 并且领域 $D=\Phi(E)$ 被分割成闭区域 $K_1,K_2,\cdots,K_n,\cdots$. 所以根据定理 7.11,

$$\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

当 $\int_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$ 时,

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{K_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将 $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 简记为 $f(\varphi,\psi)$, 则同样有

$$\int_E |f(\varphi,\psi)|J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{Q_n}|f(\varphi,\psi)|J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

并且当 $\int_E |f(\varphi,\psi)|J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v<+\infty$ 时,

$$\int_E f(\varphi,\psi)J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{Q_n}f(\varphi,\psi)J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

因此若要证明定理 7.13, 只须对每一个 n 证明

$$\int_{K_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{Q_n}|f(\varphi,\psi)|J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$\int_{K_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{Q_n}f(\varphi,\psi)J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

成立, 即只须证明下面的引理成立即可.　□

引理 7.6 $Q \subset E$ 是 (u,v) 平面上的矩形, 若 $K = \Phi(Q)$ 是对应的 (x,y) 平面上的闭区域, 则

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_Q f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.67}$$

证明 首先考虑 Q"小" 的情况. 根据假设, 在 E 上恒有

$$\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) - \varphi_v(u,v)\psi_u(u,v) = J(u,v) > 0,$$

所以在每一点 $(u,v) \in E$ 处 $\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v), \varphi_v(u,v)\psi_u(u,v)$ 中至少有一个不为 0. 并且因为 $\varphi(u,v),\psi(u,v)$ 是 $\mathscr{C}^1$ 类函数, 所以在一点 (u_0,v_0) 处若 $\varphi_u(u_0,v_0)\psi_v(u_0,v_0) \neq 0$ 或者 $\varphi_v(u_0,v_0)\psi_u(u_0,v_0) \neq 0$, 则在某矩形 $H \subset E$, $(u_0,v_0) \in (H)$ 上恒有 $\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) \neq 0$ 或者恒有 $\varphi_v(u,v)\psi_u(u,v) \neq 0$. 根据上面的 (5), $(\Phi(H)) \subset D$ 是 (x,y) 平面上的领域且 $\Phi(u_0,v_0) \in (\Phi(H))$. 若取 (x,y) 平面上的矩形 $R \subset (\Phi(H)), \Phi(u_0,v_0) \in (R)$, 则 $\Phi^{-1}((R))$ 是 (u,v) 平面上的领域, 并且 $(u_0,v_0) \in \Phi^{-1}((R))$. 因此, $Q \subset \Phi^{-1}((R))$ 作为 (u,v) 平面上的矩形 $(u_0,v_0) \in (Q)$, 若 $K = \Phi(Q)$, 则

$$K = \Phi(Q) \subset (R) \subset R \subset (\Phi(H)). \tag{7.68}$$

对于 (u,v) 平面上的矩形 Q, (u,v) 平面上存在矩形 $H \subset E, Q \subset (H)$, 且在 H 上恒有 $\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) \neq 0$ 或者恒有 $\varphi_v(u,v)\psi_u(u,v) \neq 0$. 进而在 (x,y) 平面上存在矩形 R 使得当 (7.68) 式成立时, 称 *Q 为关于映射 Φ 的小矩形*. 上述结果表明了对于任意的点 $(u_0,v_0) \in E$, 存在关于映射 Φ 的小矩形 Q, $(u_0,v_0) \in (Q)$.

对于关于映射 Φ 的小矩形 Q 来证明 (7.67) 式. 在一元函数的情况下,

$$F(\varphi(t)) = \int_a^{\varphi(t)} f(x)\mathrm{d}x$$

为 t 的函数, 对此函数进行微分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

并且该式证明了积分变换公式 (4.56). 为了让该方法适用于二重积分, 令

$$Q = Q[s,t] = \{(u,v) | 0 \leqslant u \leqslant s, 0 \leqslant v \leqslant t\}^{①},$$
$$K = K[s,t] = \Phi(Q[s,t])$$

并且将函数

$$F(s,t) = \int_{K[s,t]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

① 虽然应当写成 $Q[s,t] = \{(u,v) | s_0 \leqslant u \leqslant s, t_0 \leqslant v \leqslant t\}$, 但为了简单起见写成 $s_0 = t_0 = 0$.

作为定义在 $\{(s,t)\,|\,s \geqslant 0, t \geqslant 0, Q[s,t] \subset \Phi^{-1}((R))\}$ 上的两个变量 s, t 的函数来考虑. $K[0,0]$ 是点, $K[0,t], K[s,0]$ 是曲线而不是闭区域, 在这种情况下我们定义

$$F(0,0) = F(0,t) = F(s,0) = 0.$$

根据定理 7.4, 为了对 $Q[s,t]$ 的情况来证明 (7.67) 式, 只须证明 $F(s,t)$ 的偏导函数 $F_t(s,t), F_{ts}(s,t)$ 存在且连续, 并且

$$F_{ts}(s,t) = f(\varphi(s,t), \psi(s,t))J(s,t) \tag{7.69}$$

即可.

矩形 H 上恒有 $\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) \neq 0$ 或 $\varphi_v(u,v)\psi_u(u,v) \neq 0$, 无论哪种情况都相同, 所以不妨考虑 $\varphi_u(u,v)\psi_v(u,v) \neq 0$ 的情况. 此时 H 上恒有 $\varphi_u(u,v) > 0$ 或 $\varphi_u(u,v) < 0$, 并且恒有 $\psi_v(u,v) > 0$ 或 $\psi_v(u,v) < 0$. 无论哪种情况都相同, 所以不妨设在 H 上

$$\varphi_u(u,v) > 0 \qquad \psi_v(u,v) > 0$$

令 $H = \{(u,v)\,|\,a \leqslant u \leqslant b, c \leqslant v \leqslant d\}$, 且在 H 上考虑 u, v 和 $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ 的关系. 首先, 固定 v 时 $x = \varphi(u,v)$ 是关于 u 的单调递增函数, 其反函数 $u = \lambda(x,v)$ 是关于 x 的单调递增函数. 并且, 根据定理 7.5, $\lambda(x,v)$ 是两个变量 $x, v, \varphi(a,v) < x < \varphi(b,v), c < v < d$ 的连续可微函数. 此外根据 (7.60) 式,

$$\lambda_x(x,v) = \frac{1}{\varphi_u(u,v)} > 0.$$

进一步, $y = \tau(x,v) = \psi(\lambda(x,v),v)$ 也是关于 x, v 的连续可微函数, 并且根据 (7.62) 式,

$$\tau_v(x,v) = \frac{J(u,v)}{\varphi_u(u,v)} > 0.$$

所以, 固定 x 时, $y = \tau(x,v)$ 是 v 的单调递增函数, 因此 v 是 y 的单调递增函数. 因为 $\lambda(\varphi(u,v),v) = u$, 所以

$$\tau(\varphi(u,v),v) = \psi(u,v). \tag{7.70}$$

同理, 固定 u 时, $y = \psi(u,v)$ 是关于 v 的单调递增函数, 其反函数 $v = \mu(u,y)$ 是关于 y 的单调递增函数且关于两个变量 $u, y, a < u < b, \psi(u,c) < y < \psi(u,d)$ 连续可微. 并且

$$\mu_y(u,y) = \frac{1}{\psi_v(u,v)} > 0.$$

进一步, 若令 $\sigma(u,y)=\varphi(u,\mu(u,y))$, 则 $x=\sigma(u,y)$ 也关于两个变量 u,y 连续可微, 并且

$$\sigma_u(u,y)=\frac{J(u,v)}{\psi_v(u,v)}>0,$$

所以固定 y 时, $x=\sigma(u,y)$ 是关于 u 的单调递增函数, u 是关于 x 的单调递增函数. 因为 $\mu(u,\psi(u,v))=v$, 所以

$$\sigma(u,\psi(u,v))=\varphi(u,v). \tag{7.71}$$

根据上述 (5), 闭区域 $K[s,t]=\Phi(Q[s,t])$ 的边界由 4 条光滑曲线: $C_1=\{\Phi(s,v)\,|0\leqslant v\leqslant t\}$, $C_2=\{\Phi(u,t)\,|0\leqslant u\leqslant s\}$, $C_3=\{\Phi(0,v)\,|0\leqslant v\leqslant t\}$, $C_4=\{\Phi(u,0)\,|0\leqslant u\leqslant s\}$ 组成. 将曲线 C_1 的参数 v 变换成 $y=\psi(s,v)$, 则有 $v=\mu(s,y),\varphi(s,v)=\sigma(s,y)$, 所以

$$\Phi(s,v)=(\varphi(s,v),\psi(s,v))=(\sigma(s,y),y),$$

因此

$$C_1=\{(\sigma(s,y),y)|\psi(s,0)\leqslant y\leqslant\psi(s,t)\}.$$

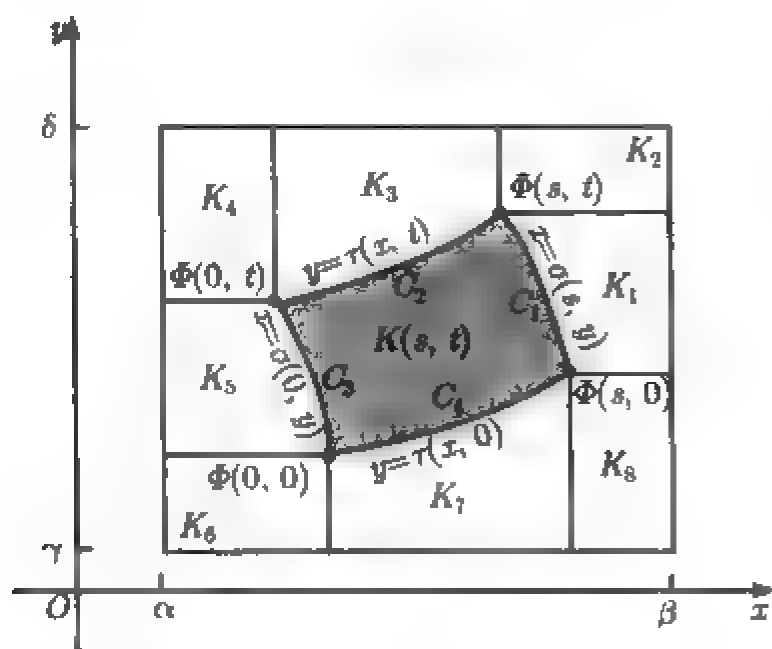
同理有

$$C_2=\{(x,\tau(x,t))|\varphi(0,t)\leqslant x\leqslant\varphi(s,t)\},$$
$$C_3=\{(\sigma(0,y),y|\psi(0,0)\leqslant y\leqslant\psi(0,t)\},$$
$$C_4=\{(x,\tau(x,0))|\varphi(0,0)\leqslant x\leqslant\varphi(s,0)\}.$$

若设 $R=\{(x,y)\,|\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\gamma\leqslant y\leqslant\delta\}$, 并且令

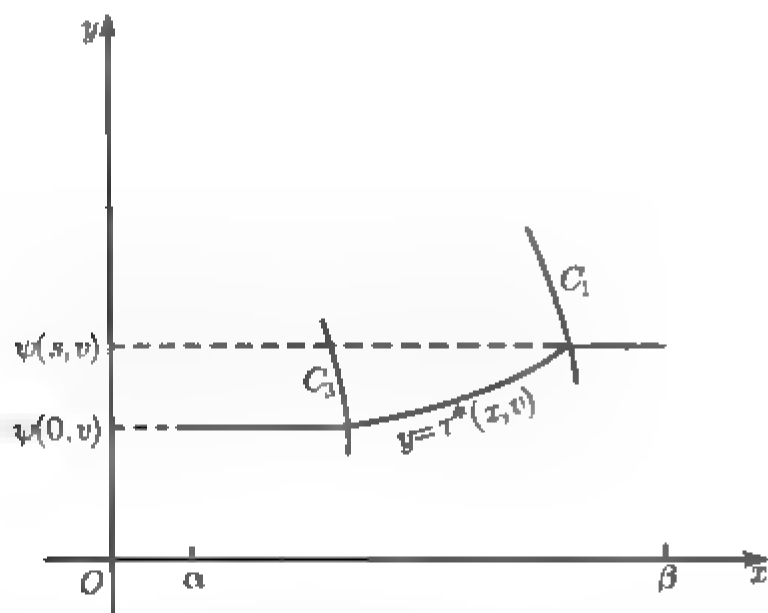
$$K_1=\{(x,y)|\sigma(x,y)\leqslant x\leqslant\beta,\psi(s,0)\leqslant y\leqslant\psi(s,t)\},$$
$$K_2=\{(x,y)|\varphi(s,t)\leqslant x\leqslant\beta,\psi(s,t)\leqslant y\leqslant\delta\},$$
$$K_3=\{(x,y)|\varphi(0,t)\leqslant x\leqslant\varphi(s,t),\tau(x,t)\leqslant y\leqslant\delta\},$$
$$K_4=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\varphi(0,t),\psi(0,t)\leqslant y\leqslant\delta\},$$
$$K_5=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\sigma(0,y),\psi(0,0)\leqslant y\leqslant\psi(0,t)\},$$
$$K_6=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\varphi(0,0),\gamma\leqslant y\leqslant\psi(0,0)\},$$
$$K_7=\{(x,y)|\varphi(0,0)\leqslant x\leqslant\varphi(s,0),\gamma\leqslant y\leqslant\tau(x,0)\},$$
$$K_8=\{(x,y)|\varphi(s,0)\leqslant x\leqslant\beta,\gamma\leqslant y\leqslant\psi(s,0)\},$$

则矩形 R 如下图, 被分割成 9 个闭区域 $K[s,t],K_1,K_2,\cdots,K_8$.



为了证明这一点, 如下定义两个变量 $x, v, \alpha \leqslant x \leqslant \beta, 0 \leqslant v \leqslant t$ 的连续函数 $\tau^*(x, v)$:

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant \varphi(0,v) \text{ 时}, & \tau^*(x,v) = \psi(0,v), \\ \varphi(0,v) \leqslant x \leqslant \varphi(s,v) \text{ 时}, & \tau^*(x,v) = \tau(x,v), \\ \varphi(s,v) \leqslant x \leqslant \beta \text{ 时}, & \tau^*(x,v) = \psi(s,v). \end{cases}$$



因为 $\varphi(u, v)$ 是关于 u 的单调递增函数, 所以 $\alpha < \varphi(0, v) < \varphi(s, v) < \beta$, 并且根据 (7.70) 式, $\tau(\varphi(0, v), v) = \psi(0, v), \tau(\varphi(s, v), v) = \psi(s, v)$, 所以 $\tau^*(x, v)$ 是关于 x 的连续函数. 进一步, $\tau^*(x, v)$ 是关于两个变量 x, v 的连续函数, 即对于任意的 $x_0, v_0, \alpha \leqslant x_0 \leqslant \beta, 0 \leqslant v_0 \leqslant t$, 当 $(x, v) \to (x_0, v_0)$ 时, $\tau^*(x, v) \to \tau^*(x_0, v_0)$. 事实上, 若 $x_0 < \varphi(0, v_0)$, 则在 (x_0, v_0) 的充分小的邻域中显然恒有 $\tau^*(x, v) = \psi(0, v)$. 若 $\varphi(0, v_0) < x_0 < \varphi(s, v_0)$, 则在 (x_0, v_0) 的充分小的邻域中显然恒有 $\tau^*(x, v) = \tau(x, v)$. 若 $\varphi(s, v_0) < x_0$, 则显然也同样成立. 若 $x_0 = \varphi(0, v_0)$, 则

$$\tau^*(x_0, v_0) = \psi(0, v_0) = \tau(x_0, v_0),$$

并且当 $(x,v)\to(x_0,v_0)$ 时,

$$\tau(x,v)\to\tau(x_0,v_0)=\tau^*(x_0,v_0),\psi(0,v)\to\psi(0,v_0)=\tau^*(x_0,v_0),$$

所以在充分接近点 (x_0,v_0) 的点 (x,v) 处, $\tau^*(x,v)$ 的值与 $\tau(x,v)$ 和 $\psi(0,v)$ 之一的值相等. 无论是哪一个, 当 $(x,v)\to(x_0,v_0)$ 时, 都有 $\tau^*(x,v)\to\tau^*(x_0,v_0)$. 若 $x_0=\varphi(s,v_0)$, 同理, 当 $(x,v)\to(x_0,v_0)$ 时, 都有 $\tau^*(x,v)\to\tau^*(x_0,v_0)$. 即 $\tau(x,v)$ 是两个变量 (x,v) 的连续函数.

因为 $\psi(0,v)$, $\tau(x,v)$ 及 $\psi(s,v)$ 都是 v 的单调递增函数, 所以根据同样的论证方法可知, 在 (x_0,v_0) 的充分小的邻域内 $\tau^*(x,v)$ 是关于 v 的单调递增函数. 因此, 固定 x 时, $\tau^*(x,v)$是关于 v 的单调递增函数.

矩形 R 被两个分段的光滑曲线 $y=\tau^*(x,0),y=\tau^*(x,t),\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 分割成三个闭区域:

$$R_1=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\gamma\leqslant y\leqslant\tau^*(x,0)\},$$
$$R_2=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\tau^*(x,0)\leqslant y\leqslant\tau^*(x,t)\},$$
$$R_3=\{(x,y)|\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\tau^*(x,t)\leqslant y\leqslant\delta\}.$$

显然 R_1 被分割成三个闭区域 K_6, K_7, K_8, 并且 R_3 被分割成 K_4, K_3, K_2. 为了验证 R_2 被分割成三个闭区域 K_5, $K[s,t]$, K_1, 任取点 $(x,y)\in R_2$, 则 $\tau^*(x,0)\leqslant y\leqslant\tau^*(x,t)$ 且 $\tau^*(x,v)$ 是关于 v 的连续单调递增函数, 所以存在唯一的 v 使得 $\tau^*(x,v)=y,0\leqslant v\leqslant t$. 此时, 若 $\alpha\leqslant x\leqslant\varphi(0,v)$, 则 $y=\tau^*(x,v)=\psi(0,v)$, 所以 $\varphi(0,v)=\varphi(0,\mu(0,y))=\sigma(0,y)$, 因此 $\alpha\leqslant x\leqslant\sigma(0,y),\psi(0,0)\leqslant y\leqslant\psi(0,t)$, 即 $(x,y)\in K_5$. 同理, 若 $\varphi(s,v)\leqslant x\leqslant\beta$, 则 $(x,y)\in K_1$. 若 $\varphi(0,v)\leqslant x\leqslant\varphi(s,v)$, 则 $y=\tau^*(x,v)=\tau(x,v)$ 且存在唯一的 u 使得 $\varphi(u,v)=x,0\leqslant u\leqslant s$, 并且 $y=\tau(x,v)=\tau(\varphi(u,v),v)=\psi(u,v)$. 因此 $(x,y)=\Phi(u,v)\in K[s,t]$. 反之, 若 $(x,y)=\Phi(u,v)\in K[s,t]$, 则 $x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$, 所以 $\varphi(0,v)\leqslant x\leqslant\varphi(s,v),0\leqslant v\leqslant t$, $y=\tau(x,v)=\tau^*(x,v)$, 因此 $(x,y)\in R_2$. 即 R_2 被分割成闭区域 K_5, K_1, $K[s,t]$.

这样将矩形 R 分割成了 9 个闭区域 $K[s,t],K_1,K_2,\cdots,K_8$, 根据定理 7.7,

$$\int_{K[s,t]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{m=1}^{8}\int_{K_m}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以若

$$G_m(s,t)=\int_{K_m}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则

$$F(s,t)+\sum_{m=1}^{8}G_m(s,t)=\int_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{7.72}$$

以上我们仅就 $s>0, t>0$ 的情况进行了考虑. 但是, 当 $t=0$ 时, K_1 , K_5 是线段, 所以令 $G_1(s,0)=0, G_5(s,0)=0$, 当 $s=0$ 时, K_3, K_7 是线段, 令 $G_3(0,t)=G_7(0,t)=0$. 那么, 当 $s\geqslant 0, t\geqslant 0, Q[s,t]\subset \Phi^{-1}((R))$ 时 (7.72) 式成立. 事实上, 例如若 $s>0, t=0$, 则 R 被分割成 6 个闭区域 K_2, K_3, K_4, K_6, K_7, K_8, 所以根据定义 $F(s,0)=0$. 由 (7.72) 式, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)=-\sum_{m=1}^{8}\frac{\partial}{\partial t}G_m(s,t). \tag{7.73}$$

直接求解 $F(s,t)=\int_{K[s,t]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的偏导函数 $\partial F(s,t)/\partial t$ 很麻烦, 但是从闭区域 K_m 的形状易知, 积分 $G_m(s,t)=\int_{K_m} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以表示为累次积分, 所以其偏导函数 $\partial G_m(s,t)/\partial t$ 通过计算很容易求得.

为了计算 $\partial G_m(s,t)/\partial t$, 固定 s 后考虑. 首先, 根据 (7.50) 式,

$$G_1(s,t)=\int_{K_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\psi(s,0)}^{\psi(s,t)}\mathrm{d}y\int_{\sigma(s,y)}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

右边的累次积分当 $t=0$ 时为 0, 所以这个等式在 $t=0$ 的情况下也成立. 根据定理 6.20 的 (1), $g(\xi,y)=\int_{\xi}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}x$ 是关于两个变量 ξ, y 的连续函数, 所以 $g(\sigma(s,y),y)$ 是关于 y 的连续函数, 因此若 $h(y)=\int_{\psi(s,0)}^{y} g(\sigma(s,y),y)\mathrm{d}y$, 则 $h'(y)=g(\sigma(s,y),y)$. 从而根据复合函数的微分法则 (定理 3.3), $G_1(s,t)=h(\psi(s,t))$ 关于 t 可微, 并且

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(s,t)=\psi_t(s,t)h'(\psi(s,t))=\psi_t(s,t)g(\sigma(s,\psi(s,t)),\psi(s,t)).$$

根据 (7.71) 式, $\sigma(s,\psi(s,t))=\varphi(s,t)$, 所以

$$\frac{\partial}{\partial t}G_1(s,t)=\psi_t(s,t)\int_{\varphi(s,t)}^{\beta} f(x,\psi(s,t))\mathrm{d}x. \tag{7.74}$$

根据同样的计算,

$$G_5(s,t)=\int_{K_5} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\psi(0,0)}^{\psi(0,t)}\mathrm{d}y\int_{\alpha}^{\sigma(0,y)} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

所以可得

$$\frac{\partial}{\partial t}G_5(s,t)=\psi_t(0,t)\int_{\alpha}^{\varphi(0,t)} f(x,\psi(0,t))\mathrm{d}x. \tag{7.75}$$

其次, 为了对

$$G_2(s,t)=\int_{K_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\psi(s,t)}^{\beta}\int_{\psi(s,t)}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

关于 t 进行偏微分, 令 $g(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\beta}\int_{\eta}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 根据 (7.10) 式和 (7.11) 式,

$$g(\xi,\eta)=\int_{\xi}^{\beta}\mathrm{d}x\int_{\eta}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\eta}^{\delta}\mathrm{d}y\int_{\xi}^{\beta}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

再根据定理 6.20 的 (1), $\int_{\eta}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y$ 是关于两个变量 x,η 的连续函数, $\int_{\xi}^{\beta}f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 ξ,y 的连续函数, 所以 $g(\xi,\eta)$ 是 ξ,η 的连续可微函数, 并且

$$g_{\xi}(\xi,\eta)=-\int_{\eta}^{\delta}f(\xi,y)\mathrm{d}y,\quad g_{\eta}(\xi,\eta)=-\int_{\xi}^{\beta}f(x,\eta)\mathrm{d}x.$$

因此根据复合函数的微分法则 (定理 6.10), $G_2(s,t)=g(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 关于 t 可微, 并且

$$\frac{\partial}{\partial t}G_2(s,t)=\varphi_t(x,t)g_{\xi}(\varphi(x,t),\psi(s,t))+\psi_t(x,t)g_{\eta}(\varphi(s,t),\psi(s,t)),$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t}G_2(s,t)=-\varphi_t(s,t)\int_{\psi(s,t)}^{\delta}f(\varphi(s,t),y)\mathrm{d}y-\psi_t(s,t)\int_{\varphi(s,t)}^{\beta}f(x,\psi(s,t))\mathrm{d}x.\quad(7.76)$$

根据同样的计算, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}G_4(s,t)=\varphi_t(0,t)\int_{\psi(0,t)}^{\delta}f(\varphi(0,t),y)\mathrm{d}y-\psi_t(0,t)\int_{\alpha}^{\varphi(0,t)}f(x,\psi(0,t))\mathrm{d}x.\quad(7.77)$$

对于

$$G_3(s,t)=\int_{K_3}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\varphi(0,t)}^{\varphi(s,t)}\mathrm{d}x\int_{\tau(x,t)}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$\int_{\eta}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y$ 是两个变量 x,η 的连续函数, 关于 η 可偏微, 并且 $\frac{\partial}{\partial\eta}\int_{\eta}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y=-f(x,\eta)$, 所以若令

$$g(x,t)=\int_{\tau(x,t)}^{\delta}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

则 $g(x,t)$ 是两个变量 x,t 的连续函数, 关于 t 可偏微, 并且

$$g_t(x,t) = -f(x,\tau(x,t))\tau_t(x,t). \tag{7.78}$$

令

$$h(x,\xi,t) = \int_\xi^x g(x,t)\mathrm{d}x,$$

则显然 $h(x,\xi,t)$ 关于 x 及 ξ 可偏微, 并且

$$h_x(x,\xi,t) = g(x,t), \quad h_\xi(x,\xi,t) = -g(\xi,t). \tag{7.79}$$

根据 (7.78) 式, 偏导函数 $g_t(x,t)$ 是两个变量 x,t 的连续函数, 所以根据积分号下的微分法 (定理 6.19 的 (2)), $h(x,\xi,t)$ 关于 t 也可偏微, 并且

$$h_t(x,\xi,t) = \int_\xi^x g_t(x,t)\mathrm{d}x. \tag{7.80}$$

该等式的右边, 例如可以写成 $\displaystyle\int_a^x g_t(x,t)\mathrm{d}x - \int_a^\xi g_t(x,t)\mathrm{d}x$, 所以根据定理 6.20 的 (1), $h_t(x,\xi,t)$ 是变量 x,ξ,t 的三元连续函数, 根据 (7.79) 式, $h_x(x,\xi,t), h_\xi(x,\xi,t)$ 也是变量 x,ξ,t 的三元连续函数. 即 $h(x,\xi,t)$ 是 x,ξ,t 的连续可微函数, 所以

$$G_3(s,t) = h(\varphi(s,t),\varphi(0,t),t)$$

关于 t 可微, 并且

$$\frac{\partial}{\partial t}G_3(s,t) = \varphi_t(s,t)g(\varphi(s,t),t) - \varphi_t(0,t)g(\varphi(0,t),t) + \int_{\varphi(0,t)}^{\varphi(s,t)} g_t(x,t)\mathrm{d}x.$$

因此根据 (7.70) 式, $\tau(\varphi(s,t),t) = \psi(s,t)$, $\tau(\varphi(0,t),t) = \psi(0,t)$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G_3(s,t) = \varphi_t(s,t) &\int_{\psi(s,t)}^{\delta} f(\varphi(s,t),y)\mathrm{d}y \\ &- \varphi_t(0,t)\int_{\psi(0,t)}^{\delta} f(\varphi(0,t),y)\mathrm{d}y + \int_{\varphi(0,t)}^{\varphi(s,t)} g_t(x,t)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{7.81}$$

闭区域 K_6, K_7, K_8 不随 t 的变化而变化, 所以 $G_6(s,t), G_7(s,t), G_8(s,t)$ 不依赖于 t, 即

$$\frac{\partial}{\partial t}G_6(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}G_7(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}G_8(s,t) = 0.$$

因此将 (7.74) 式、(7.75) 式、(7.76) 式、(7.77) 式、(7.81) 式两边相加, 得

$$\sum_{m=1}^{8}\frac{\partial}{\partial t}G_m(s,t) = \int_{\varphi(0,t)}^{\varphi(s,t)} g_t(x,t)\mathrm{d}x$$

所以根据 (7.73) 式,

$$F_t(s,t)=\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)=-\int_{\varphi(0,t)}^{\varphi(s,t)}g_t(x,t)\mathrm{d}x. \tag{7.82}$$

根据 (7.80) 式, $F_t(s,t)=-h_t(\varphi(s,t),\varphi(0,t),t)$, 并且如上所述 $h_t(x,\xi,t)$ 是三个变量 x,ξ,t 的连续函数, 所以 $F_t(s,t)$ 是两个变量 s,t 的连续函数. 又根据 (7.82) 式, $F_t(s,t)$ 关于 s 可偏微, 并且

$$F_{ts}(s,t)=-g_t(\varphi(s,t),t)\varphi_s(s,t).$$

在等式 (7.78)

$$g_t(x,t)=-f(x,\tau(x,t))\tau_t(x,t)$$

中, 若令 $x=\varphi(s,t)$, 则根据 (7.70) 式, $\tau(x,t)=\psi(s,t)$. 另外根据 (7.62) 式,

$$\tau_t(x,t)=\frac{J(s,t)}{\varphi_s(s,t)}.$$

所以

$$F_{ts}(s,t)=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))J(s,t),$$

即 (7.69) 式成立. 因此根据定理 7.4,

$$F(s,t)=\int_0^s\int_0^t f(\varphi(s,t),\psi(s,t))J(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

若将右边的积分变量 s,t 换写成 u,v, 即

$$\int_{K[s,t]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{Q[s,t]}f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

至此关于映射 Φ, 针对小矩形 $Q=Q[s,t]$, 我们证明了变量变换公式 (7.67).

任意的矩形 $Q\subset E$ 关于有限个 Φ, 可以分割成小矩形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_m$. 事实上, 就如我们在证明最开头时所述, 对于每一点 $P=(u,v)\in E$, 存在关于 Φ 的小矩形 $Q_P, P\in(Q_P)$. 所以根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), Q 被矩形 Q_p 的有限个 $Q_{P_1},Q_{P_2},\cdots,Q_{P_\lambda},\cdots,Q_{P_\nu}$ 所覆盖. 因此根据引理 7.1, 矩形 Q 被分割成有限个小矩形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_j,\cdots,Q_m$ 且每个 Q_j 分别包含于某个 Q_{P_λ} 中. 若 Q 被分割成 m 个关于 Φ 的小矩形 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_j,\cdots,Q_m$, 并且 $K_j=\Phi(Q_j)$, 则 $K=\Phi(Q)$ 也被分割成 m 个闭区域 $K_1,K_2,\cdots,K_j,\cdots,K_m$. 对于每个 Q_j,

$$\int_{K_j}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{Q_j}f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

所以

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{K_j} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{m}\int_{Q_j} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

因此, 根据定理 7.7 和定理 7.2,

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_Q f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$ □

设 $K \subset D$ 是 (x,y) 平面上由有限条光滑曲线构成边界的闭区域. 若 $H = \Phi^{-1}(K) \subset E$, 则根据 (5), H 是 (u,v) 平面上的闭区域. 此时下面的定理成立.

定理 7.14 若 $f(x,y)$ 是 K 上的连续函数, 则

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_H f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{7.83}$$

证明 根据闭区域上的积分定义 (7.32), (7.83) 与等式

$$\int_{(K)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(H)} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

等价, 该等式只是将 (7.66) 式中的 D,E 分别换成了 $(K),(H)$. □

前面的引理 7.6 是定理 7.14 的特例.

(7.65) 式、(7.66) 式、(7.83) 式是二重积分的**变量变换公式**. 函数行列式 $J(u,v)$ 用 $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ 来表示, 则变量变换公式, 例如 (7.83) 式可以改写成如下容易观察的形式:

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_H f(x,y)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad (x,y)=\Phi(u,v).$$

在 (7.65) 式、(7.83) 式中, 令 $f(x,y)=1$, 则得

$$\omega(D) = \int_E J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad E = \Phi^{-1}(D), \tag{7.84}$$

$$\omega(K) = \int_H J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad H = \Phi^{-1}(K). \tag{7.85}$$

$J(u,v)$ 是 u,v 的连续函数, 并且根据中值定理 (定理 7.9),

$$\frac{\omega(K)}{\omega(H)} = \frac{1}{\omega(H)}\int_H J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = J(u_1,v_1), \quad (u_1,v_1)\in H,$$

所以当 H 收敛于一点 (u,v) 时, $\omega(K)/\omega(H)$ 收敛于 $J(u,v)$. 即对于任意的正实数 ε, 存在正实数 $\delta(\varepsilon)$, 使得

$$当\ H \subset U_{\delta(\varepsilon)}((u,v))\ 时, \quad 有\ \left|\frac{\omega(K)}{\omega(H)} - J(u,v)\right| < \varepsilon$$

成立. 此时称 H 趋近于点 (u,v) 时, 面积比 $\omega(K)/\omega(H)$ 的极限为 $J(u,v)$, 记为

$$\lim_{H\to(u,v)} \frac{\omega(K)}{\omega(H)} = J(u,v). \tag{7.86}$$

以上关于映射 $\Phi:(u,v)\to(x,y)=\Phi(u,v)$ 我们假定了在 E 上 $J(u,v)>0$, 但若在 E 上 $J(u,v)\neq 0$, 则根据定理 6.4, 因为定义在领域 E 上的连续函数 $J(u,v)$ 的值域 $J(E)$ 是一个区间, 所以在 E 上恒有 $J(u,v)>0$ 或者恒有 $J(u,v)<0$ 成立. 当在 E上$J(u,v)<0$恒成立时, 若将变量变换公式 (7.65)、(7.66) 式、(7.83) 式右边的函数行列式 $J(u,v)$ 用其绝对值 $|J(u,v)|$ 替换, 则结论仍然成立. [证明] 若令 $\widetilde{\Phi}(u,v)=\Phi(v,u)$, 则 $\widetilde{\Phi}:(u,v)\to(x,y)=\widetilde{\Phi}(u,v)$ 是从 (u,v) 平面上的领域 $\widetilde{E}=\{(u,v)\,|(v,u)\in E\}$ 到 D 上的满的一一的连续可微映射, 其函数行列式为

$$\tilde{J}(u,v)=-J(v,u).$$

所以, 在 $\tilde{E}$ 上恒有 $\tilde{J}(u,v)>0$, 因此, 若 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛, 则根据 (7.66) 式,

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\tilde{E}} f(\varphi(v,u),\psi(v,u))\tilde{J}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

将此式右边的 u 和 v 交换, 则 $\widetilde{J}(v,u)=-J(u,v)=|J(u,v)|$, 所以

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

即变量变换公式 (7.66) 右边的 $J(u,v)$ 用 $|J(u,v)|$ 替换的公式也仍然成立.
对 (7.65) 式、(7.83) 式也一样, 将其右边的 $J(u,v)$ 用 $|J(u,v)|$ 替换, 则公式也仍然成立. □

这样若将变量变换公式 (7.65)、(7.66) 和 (7.83) 右边的函数行列式 $J(u,v)$ 用 $|J(u,v)|$ 替换, 则在 E 上恒有 $J(u,v)\neq 0$ 成立, 但是对于 $J(u,v)<0$ 的情况, 若从一开始就将 u 和 v 交换, 则这种情况可以归结于 $J(u,v)>0$ 的情况.

例 7.4 我们来考察一个简单而基本的例 7.2 的仿射变换

$$\Phi:(u,v)\to(x,y)=(\alpha u+\beta v+a,\gamma u+\delta v+b), \quad \alpha\delta-\beta\gamma>0,$$

Φ 是从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 上的一一的连续可微映射, 并且其函数行列式 $J(u,v)=\alpha\delta-\beta\gamma$ 是常数. 若 K 是 (x,y) 平面上由有限条光滑曲线组成边界的任意闭区域, $H=\Phi^{-1}(K)$, 并且 $f(x,y)$ 是 K 上的连续函数, 则根据变量变换公式 (7.83),

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (\alpha\delta-\beta\gamma)\int_H f(\alpha u+\beta v+a,\gamma u+\delta v+b)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

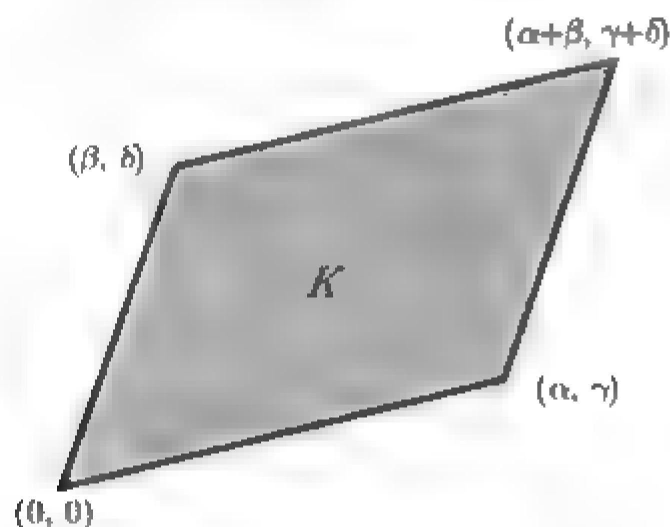
若令 $f(x,y)=1$, 则

$$\omega(K)=(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega(H).$$

取 $a=b=0$, 若 $H=\{(u,v)\,|0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1\}|$ 是 (u,v) 平面上边长为 1 的正方形, 则 $K=\Phi(H)$ 是 (x,y) 平面上的以 $(0,0)$, (α,γ), (β,δ), $(\alpha+\beta,\gamma+\delta)$ 为顶点的平行四边形. 此时, $\omega(H)=1$, 所以

$$\omega(K)=\alpha\delta-\beta\gamma.$$

平行四边形 K 的面积等于 $\alpha\delta-\beta\gamma$, 这是我们所熟知的结果.



若将仿射变换

$$\Phi:(x,y)\to(x',y')=(\alpha x+\beta y+a,\gamma x+\delta y+b)$$

看作是 (x,y) 平面上从点 (x,y) 移动到点 (x',y') 的变换, 并且用 H' 表示 $\Phi(H)$, 则

$$\omega(H')=(\alpha\delta-\beta\gamma)\omega(H).$$

令 $a=b=0,\alpha=\cos\theta,\beta=-\sin\theta,\gamma=\sin\theta,\delta=\cos\theta$, 则 Φ 是以 (x,y) 平面上的原点 O 为中心, θ 为旋转角的变换. 此时因为 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, 所以 $\omega(H')=\omega(H)$. **即面积在旋转下不变**. 若 $\alpha=\delta=1,\beta=\gamma=0$, 则 $\Phi:(x,y)\to(x',y')=(x+a,y+b)$ 是平移. 此时也有 $\omega(H')=\omega(H)$. **即面积在平移下不变**.

例如, 对于区间 $I=(a,+\infty)$, 若用 $\int_I g(x)\mathrm{d}x$ 来表示积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$. 则下面的定理在应用上很有价值.

引理 7.7　设 I,J 是开区间, $D=I\times J=\{(x,y)\,|x\in I,y\in J\}$, 并且 $g(x),h(y)$ 分别是开区间 I,J 上连续但不恒等于 0 的函数. 则广义积分 $\int_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛的充分必要条件是广义积分 $\int_I g(x)\mathrm{d}x$, $\int_J h(y)\mathrm{d}y$ 都绝对收敛, 并且

$$\int_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_I g(x)\mathrm{d}x\int_J h(y)\mathrm{d}y. \tag{7.87}$$

证明 我们只证明 $I=(a,b), J=(c,+\infty)$ 的情况, 其他情况下的证明相同. 取一正实数 ε 使得 $3\varepsilon<b-a, 3\varepsilon<1$, 设 $a_n=a+\varepsilon/n, b_n=b-\varepsilon/n, c_n=c+\varepsilon/n$, 并且令

$$A_n=\{(x,y)|a_n\leqslant x\leqslant b_n,\ \ c_n\leqslant y\leqslant n\}.$$

则因为矩形序列 $\{A_n\}$ 从内部单调收敛于 D, 所以根据广义积分的定义 (7.2 节 a)),

$$\int_D |g(x)h(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}|g(x)h(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

另外, 根据 (7.11) 式,

$$\int_{A_n}|g(x)h(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{a_n}^{b_n}\mathrm{d}x\int_{c_n}^{n}|g(x)|\cdot|h(y)|\mathrm{d}y=\int_{a_n}^{b_n}|g(x)|\mathrm{d}x\int_{c_n}^{n}|h(y)|\mathrm{d}y,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}|g(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{c_n}^{n}|h(y)|\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}|h(y)|\mathrm{d}y>0.$$

因此 $\int_D|g(x)h(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y<+\infty$ 的充分必要条件是 $\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x<+\infty$, $\int_c^{+\infty}|h(y)|\mathrm{d}y<+\infty$. 并且此时

$$\begin{aligned}\int_D g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}g(x)\mathrm{d}x\int_{c_n}^{n}h(y)\mathrm{d}y=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}h(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$ □

为方便起见, 关于正实数 σ 和 $+\infty$, 若定义

$$+\infty\cdot\sigma=\sigma\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(+\infty)=+\infty,$$

则当 $g(x)>0, h(y)>0$ 时, (7.87) 式在积分不绝对收敛时也成立.

例 7.5 设 (r,θ) 是点 (x,y) 的极坐标. 如例 7.3 中所述, $\Phi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ 是右半平面 $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^2-\{0\}$ 上的连续可微映射, 其函数行列式为

$$J(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r>0.$$

因此在领域 $E\subset\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}$ 上, Φ 是一一映射时, $f(x,y)$ 在 $D=\Phi(E)$ 上连续, 并且当 $\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛时, 根据坐标变换公式 (7.66),

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_E f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

作为例子, 取 $D=\{(x,y)\,|0<x<+\infty,0<y<+\infty,x^2+y^2>1\}$ 计算积分

$$\int_D\frac{1}{(x^2+y^2)^s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad s>0,$$

的值. 因为 $D=\Phi(E),E=\{(r,\theta)\,|1<r<+\infty,0<\theta<\pi/2\},x^2+y^2=r^2$, 所以

$$\int_D\frac{1}{(x^2+y^2)^s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_E\frac{1}{r^{2s}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_E\frac{1}{r^{2s-1}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

根据 (7.87) 式,

$$\int_E\frac{1}{r^{2s-1}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2s-1}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2s-1}}.$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2s-1}}$, 当 $s\leqslant1$ 时, 发散于 $+\infty$; 当 $s>1$ 时收敛且其值等于 $1/(2s-2)$. 因此, 当 $s>1$ 时,

$$\int_D\frac{1}{(x^2+y^2)^s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4s-4},$$

当 $s\leqslant1$ 时, $\int_D\frac{1}{(x^2+y^2)^s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散于 $+\infty$.

以上考虑了 $D=\Phi(E)$, Φ 在 E 上是一一映射的情况. 例如对于圆盘 $K=\{(x,y)\,|x^2+y^2\leqslant1\}$, 有 $K=\Phi(H),H=\{(r,\theta)\,|0\leqslant r\leqslant1,-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi\}$, 但 Φ 在矩形 H 的边界上并不是一一映射. 尽管如此, 但对于 K 上的连续函数 $f(x,y)$ 的变量变换公式

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_H f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

成立.

[证明] 若将 H 分割成两个矩形

$$H_1=\{(r,\theta)|\theta\leqslant r\leqslant1,0\leqslant\theta\leqslant\pi\},\quad H_2=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant1,-\pi\leqslant\theta\leqslant0\},$$

则 K 被分割成两个半圆

$$K_1=\Phi(H_1)=\{(x,y)\in K|y\geqslant0\},\quad K_2=\Phi(H_2)=\{(x,y)\in K|y\leqslant0\},$$

且 Φ 在开核 (H_1), (H_2) 上是一一映射. 因此

$$\begin{aligned}\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{\nu=1}^{2}\int_{K_\nu} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{\nu=1}^{2}\int_{(K_\nu)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_{\nu=1}^{2}\int_{(H_\nu)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{\nu=1}^{2}\int_{H_\nu} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_H f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

例 7.6 在例 4.11 中我们已证明 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 在此根据二元函数的积分给出它的另外的证明. 设 D 是 (x,y) 平面的第一象限: $D=\{(x,y)|0<x<+\infty, 0<y<+\infty\}$, 考虑积分

$$S=\int_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 且将积分变量 x,y 换成 r,θ, 则 $D=\Phi(E)$, $E=\{(r,\theta)|0<r<+\infty, 0<\theta<\pi/2\}$, 所以根据 (7.65) 式和 (7.87) 式,

$$S=\int_E \mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r.$$

若令 $r^2=t$ 且将积分变量 r 换成 t, 则

$$S=\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

另一方面, 根据 (7.87) 式,

$$S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

因此

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 7.7 若 $p>0, q>0$, 则 $u^{p-1}(1-u)^{q-1}$ 是关于 $u(0<u<1)$ 的连续函数, 虽然当 $p<1$ 或者 $q<1$ 时, 该函数无界, 但是根据定理 4.11 的 (1), 广义积分

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{d}u, \quad p>0, \quad q>0,$$

绝对收敛. 称两个变量 p,q 的函数 $\mathrm{B}(p,q)$ 为 **β 函数**(beta function). β 函数可以用 Γ 函数表示为

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

[证明] 考虑第一象限 $D=\{(x,y)\,|0<x<+\infty,0<y<+\infty\}$ 上的积分

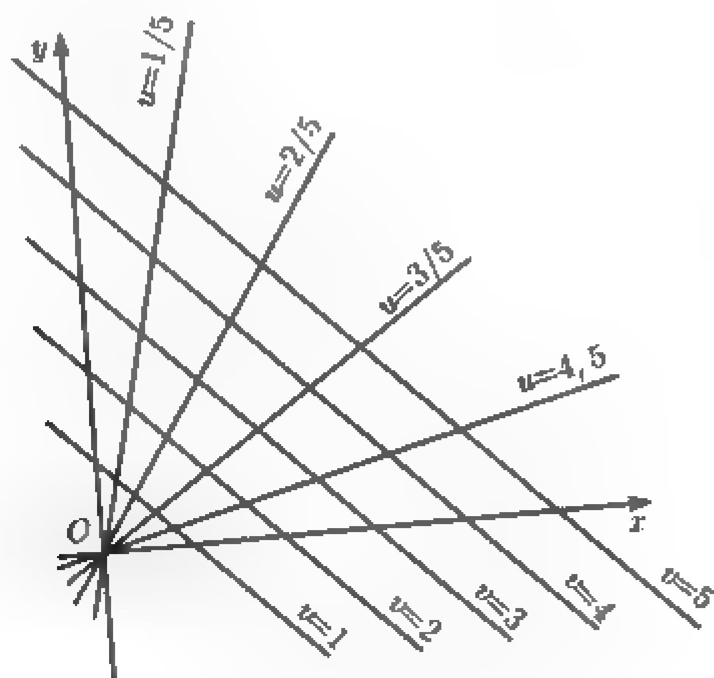
$$S=\int_D \mathrm{e}^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据 (7.87) 式和 Γ 函数的定义 (4.50),

$$S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}y^{q-1}\mathrm{d}y=\Gamma(p)\Gamma(q).$$

另一方面, 若 $u=x/(x+y), v=x+y$, 则当 $x>0,y>0$ 时, $0<u<1, 0<v<+\infty$, 且 $x=uv, y=v-uv$. 所以

$$\Phi:(u,v)\to(x,y)=(uv,v-uv)$$



是领域 $E=\{(u,v)\,|0<u<1,\ 0<v<+\infty\}$ 到 D 上的一一的连续可微的映射. Φ 的函数行列式为

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{vmatrix}=v>0.$$

所以根据变量变换公式 (7.65) 和公式 (7.87),

$$S=\int_E \mathrm{e}^{-v}(uv)^{p-1}(v-uv)^{q-1}v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_E u^{p-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{e}^{-v}v^{p+q-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\mathrm{d}u\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-v}v^{p+q-1}\mathrm{d}v=\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q).$$

因此 $\mathrm{B}(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$. □

习　题

52. 当平面上的领域 D 是任意两个都没有公共内点的无数个矩形 K_n, $n=1, 2, 3, \cdots$ 的并集: $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ 时, 未必有 $D=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n$, $U_n=(K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n)^{\circ}$. 试举例说明.

53. 求半圆 $K=\{(x,y)\,|(x-1)^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$ 上的积分 $\int_K x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

54. 求领域 $D=\{(x,y)\,|0<y<x<1\}$ 上的积分 $\int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的值.

55. 证明领域 $D=\{(x,y)\,|x>0, y>0, x+y>1\}$ 上的积分

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^s}$$

当 $s>2$ 时收敛; 当 $s\leqslant 2$ 时发散.

56. 求闭区域 $K=\left\{(x,y)\left|\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\leqslant 1\right.\right\}$ 的面积.

第8章　积分法则 (续)

由于第 7 章的篇幅过长, 我们将 n 个变量 $(n \geqslant 3)$ 的连续函数的积分放在本章讨论.

8.1　隐　函　数

在开始研究积分法则之前, 我们首先来讨论隐函数.

a) 隐函数

例如, 关于圆的方程 $x^2+y^2=r^2, r>0$, 求解 y 得 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$. $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 是定义在闭区间 $[-r,r]$ 上的关于 x 的连续函数, 并且在开区间 $(-r,r)$ 上连续可微. 若将方程 $x^2+y^2=r^2$ 的解 y 作为 x 的函数, 则 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是在每一点 $x(-r<x<r)$ 处取两个值的双值函数. 但是在一点 $x_0(-r<x_0<r)$ 处我们可以取 y 的一个值, 如取 $y_0=\sqrt{r^2-x_0^2}$ 且将 y 的定义域限制在 y_0 的充分小的邻域: $|y-y_0|<\varepsilon(\varepsilon>0)$ 上, 则在 x_0 的充分小的邻域: $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$ 上, 方程 $x^2+y^2=r^2$ 只有一个解 $y=\sqrt{r^2-x^2}$, 并且它是 x 的连续可微函数. 一般地, 下面定理成立.

定理 8.1　设 $\varphi(y,x)$ 是 (x,y) 平面的领域 D 上的连续可微函数. 若在点 $(x_0,y_0)\in D$ 处, $\varphi_y(y_0,x_0)\neq 0$, 并且令 $u_0=\varphi(y_0,x_0)$. 则对于充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得只要将 y 的定义域限制在 y_0 的 ε 邻域 $|y-y_0|<\varepsilon$ 上, 那么对于满足 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ 的每个 x, 方程 $\varphi(y,x)=u_0$ 只有唯一的解 $y=f(x)$. $y=f(x)$ 是 x 的连续可微函数, 并且其导函数为

$$f'(x)=-\frac{\varphi_x(y,x)}{\varphi_y(y,x)},\quad y=f(x). \tag{8.1}$$

若 $\varphi(y,x)$ 是 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 则 $f(x)$ 也是 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 若 $\varphi(y,x)$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数, 则 $f(x)$ 也是 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数.

证明　此定理可以由引理 7.5 直接得到. 根据假设, 要么 $\varphi_y(y_0,x_0)>0$ 要么 $\varphi_y(y_0,x_0)<0$, 无论哪种都一样, 所以不妨设 $\varphi_y(y_0,x_0)>0$. 那么在以 (x_0,y_0) 为中心的充分小的正方形 $K=\{(x,y)\,||x-x_0|\leqslant\varepsilon,|y-y_0|\leqslant\varepsilon\}$ 上, 恒有 $\varphi_y(y,x)>0$. 因此, 根据引理 7.5,

$$\Phi:(x,y)\to(u,x)=(\varphi(y,x),x)$$

是从开正方形 (K) 到领域

$$(H) = \{(u,x)|\varphi(y_0-\varepsilon,x) < u < \varphi(y_0+\varepsilon,x), |x-x_0| < \varepsilon\}$$

上的一一的连续可微映射. 其逆映射用定义在 (H) 上的连续可微函数 $\lambda(u,x)$ 表示为

$$\Phi^{-1} : (u,x) \to (x,y) = (x, \lambda(u,x)),$$

即对于每一点 $(u,x) \in (H)$, 存在唯一一个满足 $\varphi(y,x) = u$, $|y - y_0| < \varepsilon$ 的 y 且 $y = \lambda(u,x)$. 因为 $(u_0,x_0) \in (H)$, 所以若取 $\delta(\varepsilon) > 0$ 充分小, 则当 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 时, 就有 $(u_0,x) \in (H)$. 因此, 若令 $f(x) = \lambda(u_0,x)$, 则对于满足 $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 的每个 x, 方程 $\varphi(y,x) = u_0$ 在 y_0 的 ε 邻域: $|y - y_0| < \varepsilon$ 上只有唯一的解 $y = f(x)$. $f(x) = \lambda(u_0,x)$ 当然是 x 的连续可微函数. 根据 (7.61) 式, 显然其导函数由 (8.1) 式给出.

若 $\varphi(y,x)$ 是 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 则对 m 应用归纳法容易证明, $f(x)$ 也是 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 即假设 $\varphi(y,x)$ 是 $\mathscr{C}^{m-1}$ 类函数时, $f(x)$ 也是 $\mathscr{C}^{m-1}$ 类函数, 则 (8.1) 式右边的 $\varphi_x(y,x)/\varphi_y(y,x)$ 是关于 $x,y(|x-x_0| < \delta(\varepsilon), |y-y_0| < \varepsilon)$ 的 $\mathscr{C}^{m-1}$ 类函数. 又因为 $y = f(x)$ 是关于 x 的 $\mathscr{C}^{m-1}$ 类函数, 所以根据定理 6.11, $f'(x) = -\varphi_x(f(x),x)/\varphi_y(f(x),x)$ 是关于 x 的 $\mathscr{C}^{m-1}$ 类函数, 因此 $f(x)$ 是 x 的 $\mathscr{C}^m$ 类函数. □

一般地, 由方程 $\varphi(y,x) = c$ (c 是常数) 确定的关于 x 的函数 y 称为**隐示函数**(implicit function) 或者**隐函数**. 定理 8.1 证明了, 当 $\varphi(y,x)$ 是关于 x,y 的连续可微函数时, 若在点 (x_0,y_0) 处 $\varphi_y(y_0,x_0) \neq 0$, $\varphi(y_0,x_0) = c$, 则在 (x_0,y_0) 的充分小的邻域: $|y - y_0| < \varepsilon$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ 上, 由方程 $\varphi(y,x) = c$ 确定的关于 x 的隐函数可以用**显示**(explicit)$y = f(x)$ 表示, 其中 $f(x)$ 是 x 的连续函数.

引理 7.5 和定理 8.1 都可以推广到 n 元函数的情况. 以下阐述其要点.

前面阐述的连续映射、连续可微映射以及函数行列式的定义都适用于 n 个变量情况. 即, 当 $x_\nu = \varphi_\nu(u_1,u_2,\cdots,u_n)(\nu = 1,2,\cdots,n)$ 是定义在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的点集 E 上的连续映射时, 称从 E 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射

$$\Phi : (u_1,u_2,\cdots,u_n) \to (x_1,x_2,\cdots,x_n) = \Phi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

为**连续映射**. 其中

$$\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_n) = (\varphi_1(u_1,\cdots,u_n), \varphi_2(u_1,\cdots,u_n), \cdots, \varphi_n(u_1,\cdots,u_n))$$

当 E 是领域且 $\varphi_\nu(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是 E 上连续可微函数时, 称 Φ 为**连续可微映射**.

当 $\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是连续可微映射时, 称行列式

$$J(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n}\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{vmatrix}$$

为 Φ 的函数行列式, 用符号

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}$$

表示. **两个连续可微的映射 $\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\Psi:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 的复合映射 $\Psi\circ\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 的函数行列式等于 Ψ 的函数行列式与 Φ 的函数行列式的乘积:**

$$\frac{\partial(w_1,w_2,\cdots,w_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}=\frac{\partial(w_1,w_2,\cdots,w_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}.$$

当 $\Psi=\Phi^{-1}:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 时,

$$\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\cdot\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}=1.$$

因此, **若连续可微映射 $\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的逆映射 Φ^{-1} 存在且连续可微, 则**

$$\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\neq 0.$$

当 $I_1,I_2,\cdots,I_r,\cdots,I_n$ 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的区间时, 其直积

$$I_1\times I_2\times\cdots\times I_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1\in I_1,x_2\in I_2,\cdots,x_n\in I_n\}$$

称为 n 维空间 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ 上的区间. 当 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 都是闭区间时, 称 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 为闭区间; 当 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 都是开区间时, 称 $I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 为开区间. $\mathbf{R}^2$ 上的闭区间是矩形. 若 $I_1=[a_1,b_1], I_2=[a_2,b_2],\cdots,I_n=[a_n,b_n]$, 则闭区间 $K=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 可以用

$$K=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}$$

表示. K 的开核是开区间

$$(K)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|a_1<x_1<b_1,a_2<x_2<b_2,\cdots,a_n<x_n<b_n\}.$$

称点 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)(c_\nu = (a_\nu + b_\nu)/2, \nu = 1, 2, \cdots, n)$ 为闭区间 K 和开区间 (K) 的**中心**.

下面的引理 8.1 是引理 7.5 在 n 个变量情况下的推广.

引理 8.1 如果 $\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 在闭区间 $K = \{(u_1, u_2, \cdots, u_n) | a_1 \leqslant u_1 \leqslant b_1, \cdots, a_n \leqslant u_n \leqslant b_n\}$ 上连续可微且恒有 $\varphi_{u_1}(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (\partial/\partial u_1)\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n) > 0$, 那么

$$\Phi : (u_1, u_2, \cdots, u_n) \to (x, u_2, \cdots, u_n) = (\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n), u_2, \cdots, u_n)$$

是从 K 到闭领域

$$H = \{(x, u_2, \cdots, u_n) | \varphi(a_1, u_2, \cdots, u_n) \leqslant x \leqslant \varphi(b_1, u_2, \cdots, u_n),\\ a_2 \leqslant u_2 \leqslant b_2, \cdots, a_n \leqslant u_n \leqslant b_n\}$$

上的一一的连续映射, 其逆映射可以用定义在 H 上的连续函数 $\lambda(x, u_2, \cdots, u_n)$ 表示为:

$$\Phi^{-1} : (x, u_2, \cdots, u_n) \to (u_1, u_2, \cdots, u_n) = (\lambda(x, u_2, \cdots, u_n), u_2, \cdots, u_n).$$

Φ 在 (K) 上连续可微, Φ^{-1} 在 (H) 上连续可微, 即 $\lambda(x, u_2, \cdots, u_n)$ 是 (H) 上的连续可微函数. $\lambda = \lambda(x, u_2, \cdots, u_n)$ 关于 $x, u_2, \cdots, u_n$ 的偏导函数可以由

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{1}{\varphi_{u_1}(\lambda, u_2, \cdots, u_n)}, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_\nu} = -\frac{\varphi_{u_\nu}(\lambda, u_2, \cdots, u_n)}{\varphi_{u_1}(\lambda, u_2, \cdots, u_n)}, \quad \nu = 2, 3, \cdots, n \tag{8.3}$$

给出.

证明 将引理 7.5 证明过程中的变量 v 换成 $n-1$ 个变量 $u_2, \cdots, u_n$ 就可证明此引理. □

一般地, 方程 $\varphi(y, x_1, x_2, \cdots x_n) = c$ (c 是常数), 确定 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的隐函数 y. 下面关于 n 个变量隐函数的定理, 可以直接从引理 8.1 推出:

定理 8.2 设 $\varphi(y, x_1, x_2, \cdots x_n)$ 是领域 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ 上的连续可微函数, 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0) \in D$ 处, $\varphi_y(y^0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \neq 0$. 令 $u^0 = \varphi(y^0, x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, 则对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|x_1 - x_1^0| < \delta(\varepsilon), \cdots, |x_n - x_n^0| < \delta(\varepsilon)$ 时, 满足 $|y - y^0| < \varepsilon$ 的方程 $\varphi(y, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 只有唯一解 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. $f = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续可微函数, 并且其偏导函数为

$$\frac{\partial_f}{\partial_{x_\nu}} = -\frac{\varphi_{x_\nu}(y, x_1, \cdots, x_n)}{\varphi_y(y, x_1, \cdots, x_n)}, \quad y = f(x_1, \cdots, x_n). \tag{8.4}$$

若 $\varphi(y, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $\mathscr{C}^m$ 类函数, 则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 也是 $\mathscr{C}^m$ 类函数.

b) 逆映射和隐函数

为方便起见, 根据需要我们将 $\mathbf{R}^n$ 内的点记为 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$. 设 $\varphi_\mu(u) = \varphi_\mu(u_1, u_2, \cdots, u_n)(\mu = 1, 2, \cdots, m)$ 是定义在领域 $E \subset \mathbf{R}^n$ 上的 m 个 $(m \leqslant n)$ 连续可微函数. 下面我们讨论映射

$$\Phi : (u_1, u_2, \cdots, u_n) \to (x_1, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n) = (\varphi_1(u), \cdots, \varphi_m(u), u_{m+1}, \cdots, u_n).$$

令

$$J(u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots, u_n) = \frac{\partial(\varphi_1(u), \cdots, \varphi_m(u))}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_m)},$$

则 Φ 的函数行列式与 $J(u_1, u_2, \cdots, u_m, \cdots, u_n)$ 一致. 这通过观察例子, 当 $m = 2, n = 5$ 时, Φ 的函数行列式等于

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_3} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_4} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_5} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_3} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_4} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u_5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

显然是成立的.

引理 8.2 如果在点 $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0) \in E$ 处, $J(u_1^0, u_2^0, \cdots, u_n^0) \neq 0$, 那么 Φ 是 u^0 的充分小的邻域 $U \subset E$ 到 $(x_1^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) = \Phi(u^0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 若将 Φ 的定义域限制在 U 上, 则 Φ 的逆映射 Φ^{-1} 在 W 上是连续可微的.

证明 用归纳法来证明. 当 $m = 1$ 时, 此引理可归结到引理 8.1 上.

令 $\varphi_\mu = \varphi_\mu(u)$. 将行列式 $J(u)$ 按第一行展开, 则

$$J(u) = \sum_{\mu=1}^{m} (-1)^{\mu-1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_\mu} \cdot \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m)}{\partial(\cdots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \cdots)}.$$

因为 $J(u^0) \neq 0$, 所以在点 $u = u^0$ 处, $\partial(\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m)/\partial(\cdots, u_{\mu-1}, u_{\mu+1}, \cdots)$ 中至少有一个不为 0. 因此, 可以通过适当改变 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 的排列顺序, 使得

$$\left(\frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m)}{\partial(u_2, u_3, \cdots, u_m)}\right)_{u=u^0} \neq 0. \tag{8.5}$$

若令 $x_\mu = \varphi_\mu(u)$, $\mu = 1, 2, \cdots, m$, 则根据归纳法假设, 对于映射

$$\Phi_1 : (u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n) \to (u_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n)$$

此引理成立. 即 Φ_1 是从 u^0 的充分小的邻域 $U_1 \subset E$ 到 $(u_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) = \Phi_1(u^0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 并且若限制 Φ_1 的定义域到 U_1 上, 则其逆映射 Φ_1^{-1} 在 W_1 上连续可微. 因此,

$$\Psi = \Phi \circ \Phi_1^{-1} : (u_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n) \to (x_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n)$$

是定义在 W_1 上的连续可微映射, 并且在 U_1 上有

$$\Phi = \Psi \circ \Phi_1. \tag{8.6}$$

因为在 Ψ 中 x_1 是关于 $u_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n$ 的连续可微函数, 所以若令 $x_1 = \psi(u_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n)$, 则 Ψ 的函数行列式等于 $\partial\psi/\partial u_1$. 所以根据 (8.6) 式,

$$J(u) = \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_m)}{\partial(u_2, u_3, \cdots, u_m)}.$$

此处令 $u = u_0$, 则 $J(u^0) \neq 0$, 从而

$$\psi_{u_1}(u_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) \neq 0.$$

因此 $\psi_{u_1}(u_1^0, x_2^0, \cdots, u_n^0)$ 或者 > 0 或者 < 0, 无论哪种情况都一样, 不妨设 $\psi_{u_1}(u_1^0, x_2^0, \cdots, u_n^0) > 0$. 则 $\psi_{u_1}(u_1, x_2, \cdots, u_n)$ 是连续函数, 所以若取以点 $(u_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0)$ 为中心的闭区间 $K \subset W_1$ 充分小, 则在 K 上恒有 $\psi_{u_1}(u_1, x_2, \cdots, x_m, u_{m+1}, \cdots, u_n) > 0$. 所以若令 $H = \Psi(K)$, 则根据引理 8.1, Ψ 是开区间 (K) 到领域 (H) 上的一一映射. 同时, 若将 Ψ 的定义域限制到 (K) 上, 则 Ψ 的逆映射 Ψ^{-1} 是 (H) 到 (K) 上的连续可微映射. 并且显然有

$$(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) = \Psi(u_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) \in (H).$$

令 $U = \Phi_1^{-1}((K))$, $W = (H)$. 则 $(K) \subset W = \Phi_1(U_1)$, 所以 $U \subset U_1 \subset E$. 并且由于 $\Phi_1(u^0) = (u_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0)$ 是 (K) 的中心, 从而 $u^0 \in U$. 连续可微映射 $\Phi = \Psi \circ \Phi_1$ 是从 U 到 W 上的一一映射. 并且 $\Phi(u^0) = \Psi(\Phi_1(u^0)) = (x_1^0, \cdots, x_m^0, u_{m+1}^0, \cdots, u_n^0) \in W$. 又因为 Φ_1^{-1}, Ψ^{-1} 都连续可微, 所以若将 Φ 的定义域限制到 U 上, 则其逆映射 $\Phi^{-1} = \Phi_1^{-1} \circ \Psi^{-1}$ 在 W 上连续可微. □

在引理 8.2 中, 令 $m = n$, 则可直接获得下面的定理.

定理 8.3 设

$$\Phi : (u_1, u_2, \cdots, u_n) \to (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_n(u))$$

是从领域 $E \subset \mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续可微映射, 其函数行列式为

$$J(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{\partial(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_n(u))}{\partial(u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n)},$$

则在点 $u^0=(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0)\in E$ 处, 若 $J(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0)\neq 0$, 则 Φ 是从 u^0 的充分小的邻域 $U\subset E$ 到点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)=\Phi(u^0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 若将 Φ 的定义域限制到 U 上, 则 Φ 的逆映射 Φ^{-1} 在 W 上连续可微.

显然这个定理是定理 7.12 在 n 个变量情况下的推广.

定理 8.3 是引理 8.2 中 $m=n$ 的情况, 反之, 对映射

$$\begin{aligned}\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)&\to(x_1,\cdots,x_m,u_{m+1},\cdots,u_n)\\&=(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_m(u),u_{m+1},\cdots,u_n)\end{aligned}$$

应用定理 8.3 又可以获得引理 8.2.

定理 8.3 中 Φ^{-1} 可表示为

$$\Phi^{-1}:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\cdots,\lambda_n(x)).$$

因为 Φ^{-1} 的雅可比矩阵是 Φ 的雅可比矩阵的逆矩阵, 所以若函数行列式 $J(u)=\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots\varphi_n)/\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 中 $\partial\varphi_\mu/\partial u_\nu$ 的余子式为 $J_{\mu\nu}(u)$, 则

$$\frac{\partial\lambda_\mu(x)}{\partial x_\nu}=\frac{J_{\nu\mu}(u)}{J(u)},\quad u_1=\lambda_1(x),\cdots,\quad u_n=\lambda_n(x).\tag{8.7}$$

若 Φ 是 $\mathscr{C}^r$ 类映射, 则 Φ^{-1} 也是 $\mathscr{C}^r$ 类映射. [证明] $J(u)$, $J_{\nu\mu}(u)$ 都是 $\partial\varphi_\mu/\partial u_\nu(\mu,\nu=1,2,\cdots,n)$ 的多项式, 并且在 U 上 $J(u)\neq 0$, 所以若 Φ 是 $\mathscr{C}^r$ 类函数, 则 (8.7) 式的右边也是关于 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的 $\mathscr{C}^{r-1}$ 类函数. 所以若对于 $k=1,2,\cdots,r-1$, $\lambda_1(x),\cdots,\lambda_n(x)$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 $\mathscr{C}^k$ 类函数, 则根据 (8.7) 式, $\lambda_\mu(x)$ 是 $\mathscr{C}^{k+1}$ 类函数. 因此 $\lambda_1(x),\cdots,\lambda_n(x)$ 是 $\mathscr{C}^r$ 类函数. □

下面由方程组

$$\varphi_\mu(y_1,y_2,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)=\text{常数},\quad \mu=1,2,\cdots,m$$

确定的关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的隐函数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的定理是定理 8.3 的推论.

定理 8.4　设 $\varphi_\mu=\varphi_\mu(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)(\mu=1,2,\cdots,m)$ 是定义在领域 $D\subset\mathbf{R}^{m+n}$ 上的连续可微函数, 并且令

$$J(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}.$$

若在点 $(y_1^0,\cdots,y_m^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\in D$ 处, $J(y_1^0,\cdots,y_m^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\neq 0$ 且 $u_\mu^0=\varphi_\mu(y_1^0,\cdots,y_m^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$, 则对于充分小的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon),0<\delta(\varepsilon)\leqslant\varepsilon$, 使得当 $|x_\nu-x_\nu^0|<\delta(\varepsilon)(\nu=1,2,\cdots,n)$ 时, 满足 $|y_\mu-y_\mu^0|<\varepsilon(\mu=1,2,\cdots,m)$ 的方程组

$$\varphi_\mu(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots,x_n)=u_\mu^0,\quad \mu=1,2,\cdots,m,\tag{8.8}$$

只有唯一一组解 $y_\mu = f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu = 1, 2, \cdots, m$. $f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的连续可微函数.

证明 为方便起见, 我们仅就 $m = n = 2$ 的情况进行证明, 它适用于一般情况下的证明.

设 $u_1 = \varphi_1(y_1, y_2, x_1, x_2), u_2 = \varphi_2(y_1, y_2, x_1, x_2)$ 是关于 y_1, y_2, x_1, x_2 的函数. 我们讨论连续可微映射

$$\Phi : (y_1, y_2, x_1, x_2) \to (u_1, u_2, x_1, x_2).$$

Φ 的函数行列式等同于 $J(y_1, y_2, x_1, x_2)$. 并且根据假设, $J(y_1^0, y_2^0, x_1^0, x_2^0) \neq 0$. 因此根据定理 8.3, Φ 是从 $(y_1^0, y_2^0, x_1^0, x_2^0)$ 的充分小邻域

$$U = \{(y_1, y_2, x_1, x_2) | |y_1 - y_1^0| < \varepsilon, \quad |y_2 - y_2^0| < \varepsilon, \quad |x_1 - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_2 - x_2^0| < \varepsilon\}$$

到 $(u_1^0, u_2^0, x_1^0, x_2^0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 若将 Φ 的定义域限制在 U 上, 则 Φ^{-1} 在 W 上连续可微. 存在 $\delta(\varepsilon)$, $0 < \delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, 使得

$$若 \ |x_1 - x_1^0| < \delta(\varepsilon), |x_2 - x_2^0| < \delta(\varepsilon), \quad 则 \ (u_1^0, u_2^0, x_1, x_2) \in W.$$

此时, 方程组 (8.8) 等价于

$$\Phi(y_1, y_2, x_1, x_2) = (u_1^0, u_2^0, x_1, x_2).$$

所以当 $|y_1 - y_1^0| < \varepsilon, |y_2 - y_2^0| < \varepsilon, |x_1 - x_1^0| < \delta(\varepsilon), |x_2 - x_2^0| < \delta(\varepsilon)$ 时, (8.8) 式等价于

$$(y_1, y_2, x_1, x_2) = \Phi^{-1}(u_1^0, u_2^0, x_1, x_2),$$

从而具有唯一一组解 y_1, y_2. 并且 Φ^{-1} 在 W 上连续可微, 因此 y_1, y_2 是关于 x_1, x_2 的连续可微函数. □

根据定理 8.3, 若 Φ 是 $\mathscr{C}^r$ 类, 则 Φ^{-1} 也是 $\mathscr{C}^r$ 类. 所以在定理 8.4 中, 若 $\varphi_\mu(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$, $\mu = 1, 2, \cdots, m$ 是关于 $y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n$ 的 $\mathscr{C}^r$ 类函数, 则 $y_\mu = f_\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n), \mu = 1, 2, \cdots, m$ 也是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 $\mathscr{C}^r$ 类函数.

8.2 n 元函数的积分

7.1 节和 7.2 节 a)、b) 中关于两个变量连续函数积分的结果可以推广到 n 个变量情况上. 以下阐述其要点.

a) 积分的定义

本节中为了简单起见, 若没有特别说明, $\mathbf{R}^n(n \geqslant 2)$内的区间都约定为闭区间. 区间

$$K = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \cdots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

的直径为

$$\delta(K) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}.$$

$$\omega(K) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

叫做 K 的容积[①].

区间 K 上的连续函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)(P = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 的积分可以同二元情况一样来定义. 即若将各区间 $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$ 分割成 m_ν 个小区间 $I_{\nu j} = [x_{\nu(j-1)}, x_{\nu j}]$, $j = 1, 2, \cdots, m_\nu$, $a_\nu = x_{\nu 0} < x_{\nu 1} < x_{\nu 2} < \cdots < x_{\nu j} < \cdots < x_{\nu m_\nu} = b_\nu$, 则 $K = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ 被分割成 $m = m_1 m_2 \cdots m_n$ 个小区间

$$K_{ij\cdots k} = I_{1i} \times I_{2j} \times \cdots \times I_{nk},$$

$$i = 1, 2, \cdots, m_1, \quad j = 1, 2, \cdots, m_2, \quad \cdots, \quad k = 1, 2, \cdots, m_n.$$

即 $K = \bigcup_{i,j,\cdots,k} K_{ij\cdots k}$. 此分割用符号 Δ 表示. 对于 K 的每个分割 Δ, 任取属于 Δ 的每个小区间 $K_{ij\cdots k}$ 上的一点 $P_{ij\cdots k}$, 令

$$\sigma_\Delta = \sum_{i,j,\cdots,k} f(P_{ij\cdots k})\omega_{ij\cdots k}, \quad \omega_{ij\cdots k} = \omega(K_{ij\cdots k}),$$

并且设

$$\delta[\Delta] = \max_{i,j,\cdots,k} \delta(K_{ij\cdots k}).$$

则同二元函数的情况相同, 当 $\delta[\Delta] \to 0$ 时, 极限

$$s = \lim_{\delta[\Delta] \to 0} \sigma_\Delta$$

存在. 称该极限 s 为 $f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在**区间K上的积分**, 用符号 $\int_K f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 或 $\int_K f(P) d\omega$ 来表示 (定义 7.1). 积分 $\int_K f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 又可写成

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

① 高木貞治《解析概論》改订第 3 版, p.334　可以称 $\omega(K)$ 为 K 的体积, 但当 $n = 2$ 时, $\omega(K)$ 是矩形 K 的面积, 所以一般情况下称 $\omega(K)$ 为容积.

表示成这种形式的积分叫做 **n 重积分**.

b) 积分的性质

定义在区间 K 上的 n 元函数的积分同二元情况相同, 具有下列性质: 设 $f(P)$, $g(P)$ 是 K 上的关于 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的连续函数. 那么

(1) 对于任意的常数 c_1, c_2,

$$\int_K (c_1 f(P)+c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1\int_K f(P)\mathrm{d}\omega + c_2\int_K g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若在区间 K 上恒有 $f(P)\geqslant g(P)$, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega \geqslant \int_K g(P)\mathrm{d}\omega,$$

并且, 在 K 上恒有 $f(P)=g(P)$ 时, 等号才成立.

(3) 不等式

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_K |f(P)|\mathrm{d}\omega$$

成立 (此结果及证明都与定理 7.1 的 (2)、(3)、(4) 完全相同).

c) 区间块上的积分

$\mathbf{R}^n$ 上有限个区间的并集叫做**区间块**. 区间块 A 是任意两个区间都没有公共内点的有限个区间的并集, 用

$$A = K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_\lambda\cup\cdots\cup K_m,\quad (K_\lambda)\cap(K_\rho)=\varnothing\quad(\lambda\neq\rho)$$

表示. 当 A 表示为这种形式时, 称 A 被分割成有限个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m$. 将区间块 A 分割成有限个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m$, 并且定义 A 上的连续函数 $f(P)$ 的积分 (定义 7.2) 为:

$$\int_A f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_A f(P)\mathrm{d}\omega = \sum_{\lambda=1}^{m}\int_{K_\lambda} f(P)\mathrm{d}\omega.$$

积分 $\int_A f(P)\mathrm{d}\omega$ 的值仅由 $f(P)$ 和 A 确定, 且与 A 的分割方法无关.

设 $f(P)$, $g(P)$ 是区间块 A 上的连续函数. 那么

(1) 对于任意常数 c_1, c_2,

$$\int_A (c_1 f(P)+c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1\int_A f(P)\mathrm{d}\omega + c_2\int_A g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若在 A 上 $f(P)\geqslant g(P)$, 则

$$\int_A f(P)\mathrm{d}\omega \geqslant \int_A g(P)\mathrm{d}\omega,$$

并且, 在 A 上恒有 $f(P) = g(P)$ 时, 等号才成立.

(3) 不等式

$$\left|\int_A f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega$$

成立.

(4) 若 A 是没有公共内点的两个区间块 B, E 的并集: $A = B \cup E$. 当 $(B) \cap (E) = \varnothing$ 时,

$$\int_A f(P)\mathrm{d}\omega = \int_B f(P)\mathrm{d}\omega + \int_E f(P)\mathrm{d}\omega. \tag{8.9}$$

其中, $(B), (E)$ 表示 B, E 的开核.

(5) 当区间块 B 是 A 的子集: $B \subset A$ 时, 有不等式

$$\int_B |f(P)|\mathrm{d}\omega \leqslant \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega, \tag{8.10}$$

并且

$$\left|\int_A f(P)\mathrm{d}\omega - \int_B f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_A |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_B |f(P)|\mathrm{d}\omega \tag{8.11}$$

成立 (定理 7.5).

d) 广义积分

对于 $\mathbf{R}^n$ 上的领域 D, 当矩形块 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ 满足下列 2 个条件时, 称矩形块序列 $\{A_m\}$**从内部单调收敛于** D:

(i) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m \subset A_{m+1} \subset \cdots, \quad A_m \subset D$;

(ii) $\bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m) = D$.

当领域 D 给定时, 对于每一个自然数 m, 若矩形块 A_m 如下确定: 若实直线 R 被分割成宽为 $\delta_m = 1/2^m$ 的无数个区间 $I_h^m = [h\delta_m - \delta_m, h\delta_m]$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 则 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ 被分割成边长为 δ_m 的无数个立方体 (cube)

$$Q_{ij\cdots k}^m = I_i^m \times I_j^m \times \cdots \times I_k^m, \quad i, j, \cdots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{8.12}$$

当 D 有界时, 这无数个立方体 $Q_{ij\cdots k}^m$ 中包含于 D 的全部立方体的并集设为 A_m. 当 D 无界时, 包含于

$$D \cap \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) |x_1| < m, \quad |x_2| < m, \cdots, |x_n| < m\}$$

的 $Q_{ij\cdots k}^m$ 的并集设为 A_m.

设 $f(P)$ 是领域 D 上的连续函数. 任取从内部单调收敛于 D 的区间块序列$\{A_m\}$, 并令

$$\sigma_m = \int_{A_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega, \quad s_m = \int_{A_m} f(P)\mathrm{d}\omega,$$

则单调非减序列 $\{\sigma_m\}$ 或者收敛或者发散于 $+\infty$, 两者必居其一. 当 $\{\sigma_m\}$ 收敛时, $\{s_m\}$ 也收敛, 所以 $f(P)$ 在 D 上的积分由

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} f(P)\mathrm{d}\omega \tag{8.13}$$

确定. $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 可以记为 $\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$. 则因为

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty,$$

所以称广义积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 绝对收敛. 当 $\{\sigma_m\}$ 发散于 $+\infty$ 时, 记为

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = +\infty.$$

广义积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 的敛散性以及绝对收敛时积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 的值, 都与定义中用到的区间块序列 $\{A_m\}$的选择方法无关.

设 $f(P)$, $g(P)$ 是领域 D 上连续函数, $\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$, $\int_D |g(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$. 那么

(1) 对于任意的常数 c_1, c_2,

$$\int_D (c_1 f(P) + c_2 g(P))\mathrm{d}\omega = c_1\int_D f(P)\mathrm{d}\omega + c_2\int_D g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若在 D 上恒有 $f(P) \geqslant g(P)$, 则

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega \geqslant \int_D g(P)\mathrm{d}\omega$$

并且等号仅在 D 上恒有 $f(P) = g(P)$ 时才成立.

(3)

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega \tag{8.14}$$

(4) 若 E 是 D 的子领域: $E \subset D$, 则不等式

$$\int_E |f(P)|\mathrm{d}\omega \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega, \tag{8.15}$$

$$\left|\int_D f(P)\mathrm{d}\omega - \int_E f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega - \int_E |f(P)|\mathrm{d}\omega \tag{8.16}$$

都成立 (定理 7.6).

若领域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 表示为满足下列条件 (*) 式的无数个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$ 的并集:

$$D = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m \cup \cdots, \quad (K_h) \cap (K_m) = \varnothing \quad (h \neq m),$$

则称 D 被分割成为区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$:

$$D = \bigcup_{m=1}^{\infty} (K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m). \tag{*}$$

其中 $(K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m)$ 表示 $K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ 的开核.

为了将给出的领域 D 分割成无数个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$, 只须任意选取一个从内部单调收敛于 D 的区间块序列 $\{A_m\}$, 使得按顺序满足

$$\begin{aligned}
&A_1 = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{m1}, \\
&A_2 = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{m1} \cup \cdots \cup K_{m2}, \\
&A_3 = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{m1} \cup \cdots \cup K_{m2} \cup \cdots \cup K_{m3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

的区间块 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 被区间 $K_1, K_2, \cdots, K_{m1}, \cdots, K_{m2}, K_{m3}, \cdots$ 分割即可.

若 D 被无数个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$ 分割且 $A_m = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$, 则根据条件 (*) 式, 区间块序列 $\{A_m\}$从内部单调收敛于 D. 并且对于 D 上连续的任意函数 $f(P)$,

$$\int_{A_m} f(P) \mathrm{d}\omega = \sum_{h=1}^{m} \int_{K_h} f(P) \mathrm{d}\omega.$$

因此, 根据广义积分的定义, 可以获得下面的结果:

(5) 设 D 被分割为无数个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$. 若 $f(P)$ 在 D 上连续, 则

$$\int_D |f(P)| \mathrm{d}\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{K_m} |f(P)| \mathrm{d}\omega. \tag{8.17}$$

当上式右边的级数收敛时, 广义积分 $\int_D f(P) \mathrm{d}\omega$ 绝对收敛, 并且

$$\int_D f(P) \mathrm{d}\omega = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{K_m} f(P) \mathrm{d}\omega. \tag{8.18}$$

因为广义积分的定义 (8.13) 式的右边是 (8.18) 式右边的无穷级数的部分和的极限, 所以可以用 (8.18) 式代替 (8.13) 式来定义广义积分 $\int_D f(P) \mathrm{d}\omega$.

对于区间 K,

$$\int_K \mathrm{d}\omega = \omega(K)$$

当然是 K 的容积. 对于区间块 A, 若将 A 分割成有限个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m$, 则

$$\int_A d\omega = \sum_{\lambda=1}^{m} \int_{K_\lambda} d\omega = \sum_{\lambda=1}^{m} \omega(K_\lambda).$$

是 A 的容积. 记为 $\omega(A)$:

$$\omega(A) = \int_A d\omega = \int_A dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

引理 7.1 对于 $\mathbf{R}^n$ 内的区间也同样成立. 所以, 当两个区间块 A, B 给定时, 区间块 $A \cup B$ 被分割成有限个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_h, \cdots, K_l, \cdots, K_m$, 使得

$$\begin{cases} A = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_h \cup \cdots \cup K_l, \\ B = K_h \cup K_{h+1} \cup \cdots \cup K_l \cup \cdots \cup K_m. \end{cases} \tag{8.19}$$

此时

$$(A \cap B) \subset K_h \cup K_{h+1} \cup \cdots \cup K_l \subset A \cap B,$$

但未必有 $K_h \cup K_{h+1} \cup \cdots \cup K_l = A \cap B$. 根据 (8.19) 式, 可直接获得不等式

$$\omega(A \cup B) \leqslant \omega(A) + \omega(B). \tag{8.20}$$

定义任意领域 D 的容积为

$$\omega(D) = \int_D d\omega = \int_D dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

若将 D 分割成无数个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$, 则

$$\omega(D) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega(K_m). \tag{8.21}$$

若 E 是 D 的子领域: $E \subset D$, 则显然有 $\omega(E) \leqslant \omega(D)$.

若 $f(P)$ 是区间 A 上的连续函数且恒有 $|f(P)| \leqslant M$, M 为常数, 则

$$\left| \int_A f(P) d\omega \right| \leqslant M\omega(A). \tag{8.22}$$

当 $f(P)$ 在领域 D 上连续且 $|f(P)| \leqslant M$ 时, 若 $\omega(D) < +\infty$, 则广义积分 $\int_D f(P) d\omega$ 绝对收敛, 并且

$$\left| \int_D f(P) d\omega \right| \leqslant M\omega(D). \tag{8.23}$$

因此, 有界领域 D 上的有界连续函数在 D 上的广义积分绝对收敛.

e) 有界闭领域上的积分

7.2 节 c) 中平面上的有界闭领域 $[D]$ 上的连续函数 $f(P) = f(x, y)(P = (x, y))$ 的积分, 在 $[D]$ 为闭领域 (定义 7.3) 的条件下, 由

$$\int_{[D]} f(P)\mathrm{d}\omega = \int_{D} f(P)\mathrm{d}\omega \quad (D \text{ 是 } [D] \text{ 的开核})$$

定义 (定义 7.4). 对于任意有界闭领域 $[D]$, 若同样定义连续函数 $f(P)$ 在 $[D]$ 上的积分, 则将 $[D]$ 分割成任意两个都没有公共内点的有限个有界闭领域 $[D_\lambda]$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$ 时, 一般地, 基本公式

$$\int_{[D]} f(P)\mathrm{d}\omega = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{[D_\lambda]} f(P)\mathrm{d}\omega$$

不成立 (例 7.1). 为了使此公式成立就必须对讨论的有界闭领域的范围进行适当的限制. 虽然讨论的范围可以是可确定面积的有界闭领域, 但是实际应用上适用的有界闭领域是闭区域或有限个闭区域的并, 所以在有限制的闭区域上, 对积分进行了讨论.

但是用这种方法来研究 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 的有界闭领域上的积分格外地困难 (参考后文所述的注). 与其这样, 倒不如按传统的方法讨论可确定容积的有界闭领域, 这样会更加方便.

定义 8.1　设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 是有界点集, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 若存在满足 $S \subset A_\varepsilon, \omega(A_\varepsilon) < \varepsilon$ 的区间块 A_ε, 则称 S 的容积为 0, 并记为 $\omega(S) = 0$.

若 $\omega(S) = 0$, 则对于 S 的任意子集 $T \subset S$, 显然有 $\omega(T) = 0$. 若 $\omega(S) = 0$, 则 $\omega([S]) = 0$, 另外, 对于两个点集 S 和 T, 若 $\omega(S) = 0, \omega(T) = 0$, 则 $\omega(S \cup T) = 0$. 事实上, 若 $S \subset A_\varepsilon, T \subset B_\varepsilon, A_\varepsilon$ 和 B_ε 是区间块, 并且 $\omega(A_\varepsilon) < \varepsilon, \omega(B_\varepsilon) < \varepsilon$, 则 $[S] \subset A_\varepsilon, S \cup T \subset A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. 并且根据 (8.20) 式, $\omega(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \leqslant \omega(A_\varepsilon) + \omega(B_\varepsilon) < 2\varepsilon$.

若 $Q_{ij\cdots k}^m$ 是 (8.12) 式的立方体, 则如前面 d) 中的开头所述, n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 被分割成边长为 $\delta_m = 1/2^m$ 的无数个立方体 $Q_{ij\cdots k}^m$, $i, j, \cdots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

引理 8.3　当有界点集 $S \subset \mathbf{R}^n$ 的容积为 0 时, 若与 S 有公共点的立方体 $Q_{ij\cdots k}^m$ 的并集为

$$B_m = \bigcup_{Q_{ij\cdots k}^m \cap S \neq \phi} Q_{ij\cdots k}^m,$$

则

$$\lim_{m \to \infty} \omega(B_m) = 0.$$

证明　根据假设, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在满足 $S \subset A_\varepsilon, \omega(A_\varepsilon) < \varepsilon$ 的区间块 A_ε. 将

A_ε 分割成有限个区间 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$, 并且对于每一个区间 K_λ, 令

$$B_{\lambda_m} = \bigcup_{Q_{ij\cdots k}^m \cap K_\lambda \neq \phi} Q_{ij\cdots k}^m$$

则显然有

$$\lim_{m\to\infty} \omega(B_{\lambda m}) = \omega(K_\lambda).$$

因为

$$B_m \subset B_{1m} \cup B_{2m} \cup \cdots \cup B_{\nu m},$$

所以根据 (8.20) 式,

$$\omega(B_m) \leqslant \omega(B_{1m}) + \omega(B_{2m}) + \cdots + \omega(B_{\nu m}),$$

因此

$$\limsup_{m\to\infty} \omega(B_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \omega(B_{\lambda m}) = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \omega(K_\lambda) = \omega(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

又因为 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 所以 $\lim\limits_{m\to\infty} \omega(B_m) = 0$. □

定义 8.2 当 $\mathbf{R}^n$ 内有界闭领域 $[D]$ 的边界 $[D] - D$ (D 是 $[D]$ 的开核) 的容积为 0 时, 称 $[D]$ 为**容积确定**. 容积确定的有界闭领域 $[D]$ 上的连续函数 $f(P)$ 在 $[D]$ 上的广义积分定义为:

$$\int_{[D]} f(P)\mathrm{d}\omega = \int_D f(P)\mathrm{d}\omega \tag{8.24}$$

连续函数 $f(P)$ 在有界闭领域 $[D]$ 上有界, 所以 (8.24) 式右边的广义积分绝对收敛. 记为 $\int_{[D]} f(P)\mathrm{d}\omega$ 或者 $\int_{[D]} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 等.

$[D]$ 是有界闭领域 (D 是 $[D]$ 的开核), 它若表示为任意两个都没有公共内点的有限个闭领域 $[D_\lambda]$(D_λ 是 $[D_\lambda]$ 的开核, $\lambda = 1, 2, \cdots, \nu$) 的并集

$$[D] = [D_1] \cup [D_2] \cup \cdots \cup [D_\lambda] \cup \cdots \cup [D_\nu], \quad D_\lambda \cap D_\rho = \varnothing \quad (\lambda \neq \rho),$$

则称 $[D]$ 被分割成有限个闭领域 $[D_1], [D_2], \cdots, [D_\nu]$.

定理 8.5 *若 $f(P)$ 是容积确定的有界闭领域 $[D]$ 上的连续函数, 则当 $[D]$ 被分割成有限个容积确定的有界闭领域 $[D_1], [D_2], \cdots, [D_\nu]$ 时,*

$$\int_{[D]} f(P)\mathrm{d}\omega = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \int_{[D_\lambda]} f(P)\mathrm{d}\omega. \tag{8.25}$$

证明 采用与证明定理 7.7 一样的方法. 设 D 和 D_λ 分别是 $[D]$ 和 $[D_\lambda]$ 的开核. 根据假设, $[D_\lambda]$ 的边界 $S_\lambda = [D_\lambda] - D_\lambda$ 的容积为 0, 所以并集 $S = \bigcup\limits_{\lambda=1}^{\nu} S_\lambda$ 的容积也

是 0: $\omega(S)=0$. 当然 $D_\lambda\subset D, D_\lambda\cap D_\rho=\varnothing(\lambda\neq\rho)$ 且 $D\subset\bigcup_{\lambda=1}^{\nu}D_\lambda\cup S$. 将 $\mathbf{R}^n$ 分割成边长为 $\delta_m=1/2^m$ 的无数个立方体 $Q^m_{ij\cdots k}$ 且满足 $Q^m_{ij\cdots k}\subset D$ 的立方体 $Q^m_{ij\cdots k}$ 的并集设为 A_m. 若令满足 $Q^m_{ij\cdots k}\subset D_\lambda$ 的立方体 $Q^m_{ij\cdots k}$ 的并集为 $A_{\lambda m}$, 并且令满足 $Q^m_{ij\cdots k}\subset D(Q^m_{ij\cdots k}\not\subset D_\lambda, \lambda=1,2,\cdots,\nu)$ 的立方体 $Q^m_{ij\cdots k}$ 的并集为 B_m, 则区间块 A_m 被分割成 $\nu+1$ 个区间块 $A_{1m},A_{2m},\cdots,A_{\nu m},B_m$. 因此根据 (8.9) 式,

$$\int_{A_m}f(P)\mathrm{d}\omega=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{A_{\lambda m}}f(P)\mathrm{d}\omega+\int_{B_m}f(P)\mathrm{d}\omega. \tag{8.26}$$

区间块序列 $\{A_m\}$和 $\{A_{\lambda m}\}$分别从内部单调收敛于 D 和 D_λ. 若 $Q^m_{ij\cdots k}\subset B_m$, 则 $Q^m_{ij\cdots k}\cap S\neq\varnothing$. 根据引理 8.3,

$$\lim_{m\to\infty}\omega(B_m)=0,$$

所以, $f(P)$ 在 $[D]$ 上有界, 因此根据不等式 (8.22),

$$\lim_{m\to\infty}\int_{B_m}f(P)\mathrm{d}\omega=0.$$

故, 当 $m\to\infty$ 时, 若对 (8.26) 式取极限, 则可得

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega=\sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{D_\lambda}f(P)\mathrm{d}\omega,$$

即 (8.25) 式成立. □

目前为止一直都用字母 K 表示了区间, 从现在开始也用 K 来表示有界闭领域 $[D]$: $K=[D]$.

定理 8.6　设 K 是容积确定的有界闭领域, $f(P), g(P)$ 是 K 上的连续函数. 那么

(1) 对于任意常数 c_1, c_2,

$$\int_K(c_1f(P)+c_2g(P))\mathrm{d}\omega=c_1\int_K f(P)\mathrm{d}\omega+c_2\int_K g(P)\mathrm{d}\omega.$$

(2) 若 K 上恒有 $f(P)\geqslant g(P)$, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\geqslant\int_K g(P)\mathrm{d}\omega,$$

等号当且仅当在 K 上恒有 $f(P)=g(P)$ 时才成立.

(3)

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\right|\leqslant\int_K|f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{8.27}$$

(4) 若容积确定的有界闭领域 L 包含于 K：$L \subset K$, 则不等式

$$\int_L |f(P)|d\omega \leqslant \int_K |f(P)|d\omega, \tag{8.28}$$

$$\left|\int_K f(P)d\omega - \int_L f(P)d\omega\right| \leqslant \int_K |f(P)|d\omega - \int_L |f(P)|d\omega \tag{8.29}$$

成立 (参考定理 7.8).

证明 根据广义积分的定义 (8.24) 式和前一项 d) 的 (1)、(2)、(3)、(4), 结论显然. □

定义容积确定的有界闭领域 K 的容积为

$$\omega(K) = \int_K d\omega = \int_K dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

则显然,

$$\omega(K) = \omega(D), \quad D = (K). \tag{8.30}$$

若将 K 分割成有限个容积确定的有界闭领域 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$, 则根据定理 8.5,

$$\omega(K) = \omega(K_1) + \omega(K_2) + \cdots + \omega(K_\nu). \tag{8.31}$$

若 L 是 K 的容积确定的子闭领域, 则

$$\omega(L) \leqslant \omega(K), \quad L \subset K. \tag{8.32}$$

若 $f(P)$ 和 $g(P)$ 都在 K 上连续且在 K 上恒有 $g(P) > 0$, 则存在满足

$$\int_K f(P)g(P)d\omega = f(\Xi)\int_K g(P)d\omega, \quad \Xi \in K, \tag{8.33}$$

的点 Ξ(推广的中值定理, 参考定理 4.3).

[证明] 设 $f(P)$ 在 K 上的最小值和最大值分别为 μ 和 M. 则根据 (2) 和 (1),

$$\mu \int_K g(P)d\omega \leqslant \int_K f(P)g(P)d\omega \leqslant \mathrm{M}\int_K g(P)d\omega.$$

又因为, 对于 n 元连续函数 $f(P)$, 定理 6.5 也成立, 即 $f(P)$ 的值域 $f(K)$ 是闭区间 $[\mu, \mathrm{M}]$. 因此存在满足

$$f(\Xi) = \int_K f(P)g(P)d\omega \Big/ \int_K g(P)d\omega$$

的点 $\Xi \in K$. □

(8.33) 式中, 令 $g(P)=1$, 则对于 n 元连续函数 $f(P)$, 中值定理成立, 即存在满足

$$\frac{1}{\omega(K)}\int_K f(P)\mathrm{d}\omega = f(\Xi),\quad \Xi\in K, \tag{8.34}$$

的点 Ξ. 若在 K 上恒有 $|f(P)|\leqslant \mathrm{M}$, 则

$$\left|\int_K f(P)\mathrm{d}\omega\right| \leqslant \mathrm{M}\omega(K) \tag{8.35}$$

显然成立.

$\mathbf{R}^n$ 内的领域 D 是满足下面条件 (*) 的无数个有界闭领域 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$ 的并集, 若它表示为

$$D = K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m\cup\cdots,\quad (K_l)\cap(K_m)=\phi\quad (l\neq m),$$

则称 D 被分割成无数个有界闭领域 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$:

$$D=\bigcup_{m=1}^{\infty}(K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m). \tag{*}$$

这里 $(K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m)$ 表示 $K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m$ 的开核.

此条件 (*) 对应于平面上领域分割的条件 (ii). 与条件 (i) 相对应的是下面的引理 (参考定理 7.11 前的 (i), (ii)).

引理 8.4　当领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 被分割成无数个有界闭领域时, 将这些有界闭领域按适当的顺序排列得 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$, 并且选取适当的单调递增自然数列 $m_1, m_2, \cdots, m_\nu, \cdots$, 令

$$H_\nu = K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_{m\nu},$$

则每个 $H_\nu(\nu=1,2,3,\cdots)$ 是有界闭领域.

证明　(1) 当 D 被分割成无数个有界闭领域 $K_1, K_2, K_3, \cdots$ 时, 对于某 m, 设 $H=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m$ 是有界闭领域, 即 (H) 是连通开集. 则根据条件 (*) 式, 对于充分大的自然数 l 有

$$H\subset(H\cup K_{m+1}\cup K_{m+2}\cup\cdots\cup K_l).$$

因此, 若从 $K_{m+1}, K_{m+2}, K_{m+3}, \cdots$ 中适当选取 s 个闭领域 $K_{m_1}, K_{m_2}, \cdots, K_{m_s}$, 则存在满足

$$H\subset(H\cup K_{m_1}\cup K_{m_2}\cup\cdots\cup K_{m_s})$$

的 s 的最小值. 取其最小值为 μ, 则

$$H\subset(H\cup K_{m_1}\cup K_{m_2}\cup\cdots\cup K_{m_\mu}),$$

令

$$H_* = H \cup K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup \cdots \cup K_{m_\mu} \tag{8.36}$$

则

$$H \subset (H_*). \tag{8.37}$$

为了证明 H_* 是闭领域, 即开集 (H_*) 是连通的, 我们假设

$$(H_*) = U \cup V, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U, V \text{ 为开集}.$$

因为 (H) 是连通的, 所以有 $(H) \subset U$ 或者 $(H) \subset V$, 无论哪种情况都一样, 不妨设 $(H) \subset U$. 同理, 对于每一个 $\lambda = 1, 2, \cdots, \mu$, $(K_{m_\lambda}) \subset U$ 或者 $(K_{m_\lambda}) \subset V$, 所以当 $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ 时, 设 $(K_{m_\lambda}) \subset U$; 当 $\kappa + 1 \leqslant \lambda \leqslant \mu$ 时, 设 $(K_{m_\lambda}) \subset V$. 并且令

$$L = H \cup K_{m_1} \cup \cdots \cup K_{m_\kappa}, \quad M = K_{m_{\kappa+1}} \cup \cdots \cup K_{m_\mu}.$$

因为 $U \cap V = \varnothing$ 且 U 和 V 是开集, 所以 $[U] \cap V = \varnothing$, 又因为 $H \subset [U]$, 从而 $H \cap V = \varnothing$. 同理, 若 $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$, 则 $K_{m_\lambda} \cap V = \varnothing$; 若 $\kappa + 1 \leqslant \lambda \leqslant \mu$, 则 $K_{m_\lambda} \cap U = \varnothing$. 因此

$$L \cap V = \varnothing, \quad M \cap U = \varnothing.$$

$U \cup V = (L \cup M) \subset L \cup M$, 所以 $(L) \subset U \subset L$, 因此 $U = (L)$, 同理 $V = (M)$. 因为 $H \subset (H_*) = U \cup V$, $H \cap V = \varnothing$, 所以

$$H \subset U = (L) = (H \cup K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup \cdots \cup K_{m_\kappa}).$$

因此根据 μ 的定义, $\kappa = \mu$, 从而 $M = \varnothing$, 即 $V = \varnothing$. 故 (H_*) 是连通开集.

(2) 首先令 $H_1 = K_{m_1}, m_1 = 1$. 其次对于 $H = H_1$, 根据上述对 (1) 的操作方法定义 H_{1*}, 令 $H_2 = H_{1*}$. 则根据 (8.36) 式, H_2 是满足

$$H_2 = K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup K_{m_3} \cup \cdots \cup K_{m_{\mu(2)}}$$

的有界闭领域. 以下对于 $\nu = 2, 3, 4, \cdots$, 顺次令

$$H_{\nu+1} = H_{\nu*},$$

则可获得有界闭领域

$$\begin{aligned} H_{\nu+1} &= H_\nu \cup K_{m_{\mu(\nu)+1}} \cup K_{m_{\mu(\nu)+2}} \cup \cdots \cup K_{m_{\mu(\nu+1)}} \\ &= K_{m_1} \cup K_{m_2} \cup K_{m_3} \cup \cdots \cup K_{m_\lambda} \cup \cdots \cup K_{m_{\mu(\nu+1)}}. \end{aligned}$$

根据 (8.37) 式,

$$H_\nu \subset (H_{\nu+1}), \tag{8.38}$$

所以 $\mu(\nu) < \mu(\nu+1)$.

(3) 为证明 $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}(H_\nu)$, 令 $E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}(H_\nu)$, $W = D - E$. 因为 D 是连通的, E 是开集, 所以若要证明 $W = \varnothing$, 只须证明 W 是开集. 为此, 任取点 $P \in W$. 根据条件 (*), 对于充分大的 m,

$$P \in (K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_h \cup \cdots \cup K_m).$$

此时, 若 $P \notin K_h$, 则 $P \in (K_1 \cup \cdots \cup K_{h-1} \cup K_{h+1} \cup \cdots \cup K_m)$, 所以若设 $K_h(h = 1, 2, \cdots, m)$ 中满足 $P \in K_h$ 的集合为 $K_{h_\lambda}, \lambda = 1, 2, \cdots, \tau$, 则

$$P \in (K_{h_1} \cup K_{h_2} \cup \cdots \cup K_{h_\lambda} \cup \cdots \cup K_{h_\tau}), \quad P \in K_{h_\lambda}.$$

此时, $K_{h_\lambda} \cap E = \varnothing$. 事实上, 若 $K_{h_\lambda} \cap E \neq \varnothing$, 则关于某个 ν 有 $K_{h_\lambda} \cap H_\nu \neq \varnothing$, 所以 $K_{h_\lambda} \subset H_{\nu+1}$. 因此 $K_{h_\lambda} \subset W$, 所以

$$P \in (K_{h_1} \cup K_{h_2} \cup K_{h_3} \cup \cdots \cup K_{h_\tau}) \subset W.$$

故 P 是点 W 的内点. 因而, 由于每一点 $P \in W$ 是 W 的内点, 所以 W 是开集. 因此 $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}(H_\nu)$.

(4) 因为 $D = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}(H_\nu) = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} K_{m_\lambda}$, 所以每一个 K_m 分别与某个 K_{m_λ} 是一致的. 即 $K_{m_1}, K_{m_2}, K_{m_3}, \cdots, K_{m_\lambda}, \cdots$ 是由 $K_1, K_2, K_3, \cdots, K_m, \cdots$ 经过变换排列顺序而得到的闭领域序列. □

定理 8.7 设领域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 被分割成无数个容积确定的有界闭领域 $K_1, K_2, \cdots, K_m, \cdots$. 若 $f(P)$ 是 D 上的连续函数, 则

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}\omega = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{K_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega. \tag{8.39}$$

当 $\sum_{m=1}^{\infty}\int_{K_m}|f(P)|\mathrm{d}\omega < +\infty$ 时, 广义积分 $\int_D f(P)\mathrm{d}\omega$ 绝对收敛, 并且

$$\int_D f(P)\mathrm{d}\omega = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{K_m} f(P)\mathrm{d}\omega. \tag{8.40}$$

证明 根据引理 8.4, 存在单调递增数列 $\{m_\nu\}$, 使得 $H_\nu = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_{m_\nu}$ 是有界闭领域. 定理 7.11 的证明中, 只要将 $H_m = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$ 换成 H_ν, 则证明完全适用于本定理的证明. □

以上阐述了容积确定的有界闭领域上的连续函数的积分, 但通常在实际应用上必须要验证所采用的有界闭领域是容积确定的.

首先, 引理 7.2 表明了平面上初等曲线的面积为 0. *因此平面上的闭区域面积确定.*

如 $C=\{(x,\psi(x))\,|a\leqslant x\leqslant b\}$ 这样的初等曲线是定义在实直线 $\mathbf{R}$ 的闭区间上的连续函数的图像. 同初等曲线时类似, 定义在平面 $\mathbf{R}^2$ 上的有界闭领域 H 上的连续函数 $z=\chi(x,y)$, $x=\varphi(y,z)$ 及 $y=\psi(z,x)$ 的图像分别为 $S=\{(x,y,\chi(x,y))|(x,y)\in H\}$, $S=\{(\varphi(y,z),y,z)\,|(y,z)\in H\}$ 及 $S=\{(x,\psi(z,x),z)\,|(z,x)\in H\}$, 称为空间 $\mathbf{R}^3$ 内的**初等曲面**. *初等曲面 S 的体积为 0: $\omega(S)=0$.* 此结论的证明与引理 7.2 完全一样. 因此, $\mathbf{R}^3$ *内的有界闭领域 K 的边界 $K-(K)$ 被有限个初等曲面覆盖, 即若*

$$K-(K)\subset\bigcup_{k=1}^{m}S_k,\quad S_k \text{ 是初等曲面},$$

则 K 的体积确定.

平面上光滑的曲线在应用上很重要. 类似地将空间 $\mathbf{R}^3$ 内的**光滑曲面**如下定义: T 是 (t,u) 平面上的有界闭领域, 其边界由有限条光滑曲线组成. $\varphi=\varphi(t,u)$, $\psi=\psi(t,u)$, $\chi=\chi(t,u)$ 是某领域 $G\supset T$ 上的连续可微函数, 并且在每一点 $(t,u)\in T$ 处的函数行列式

$$\begin{vmatrix}\varphi_t & \varphi_u\\ \psi_t & \psi_u\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\psi_t & \psi_u\\ \chi_t & \chi_u\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\chi_t & \chi_u\\ \varphi_t & \varphi_u\end{vmatrix} \tag{8.41}$$

中至少有一个不为 0, 称点集

$$S=\{(x,y,z)|x=\varphi(t,u),\ y=\psi(t,u),\ z=\chi(t,u),(t,u)\in T\} \tag{8.42}$$

为 $\mathbf{R}^3$ 内的**光滑曲面**. 并且 (8.42) 式是曲面 S 的**参数表示**, 称 t,u 为**参数**. (8.41) 式的函数行列式至少有一个不为 0 这个条件可以用下面的不等式

$$\begin{vmatrix}\varphi_t & \varphi_u\\ \psi_t & \psi_u\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_t & \psi_u\\ \chi_t & \chi_u\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_t & \chi_u\\ \varphi_t & \varphi_u\end{vmatrix}^2>0 \tag{8.43}$$

表示.

若引入从平面上的领域 G 到 $\mathbf{R}^3$ 的连续可微映射

$$\Psi:(t,u)\to(x,y,z)=(\varphi(t,u),\psi(t,u),\chi(t,u)),$$

则显然有 $S=\Psi(T)$.

例 8.1 若

$$\varphi=\frac{2t}{t^2+u^2+1},\quad \psi=\frac{2u}{t^2+u^2+1},\quad \chi=\frac{t^2+u^2-1}{t^2+u^2+1},$$

则 (8.43) 式的左边为 $16(t^2+u^2+1)^{-4}$. 若 T 是半径为 3 的闭圆盘 $\{(t,u)\,|t^2+u^2\leqslant 9\}$, 则 (8.42) 式的曲面 S 表示从以 $\mathbf{R}^3$ 的原点为中心、1 为半径的球面去掉以 "北极" $(0,0,1)$ 为中心的一个 "冠状领域" 后剩下的部分: $S=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2=1, z\leqslant 4/5\}$.

参数表示 (8.42) 式中, 例如 $\varphi(t,u)=t, \psi(t,u)=u$ 恒成立时, $S=\{(x,y,\chi(x,y))|(x,y)\in T\}$ 是**光滑初等曲面**.

空间 $\mathbf{R}^3$ 内的光滑曲面 S 的体积为 0: $\omega(S)=0$. [证明] 因为初等曲面的体积为 0, 所以只须证明 S 被有限个初等曲面所覆盖, 即存在有限个初等曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_m$, 使得

$$S\subset S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m \tag{8.44}$$

即可. 任意选取点 $(t_0,u_0)\in T$, 则 (8.41) 式的函数行列式中至少有一个在 (t_0,u_0) 处不为 0. 从而, 在点 (t_0,u_0) 处

$$\begin{vmatrix} \varphi_t & \varphi_u \\ \psi_t & \psi_u \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此, 根据定理 8.3 或者定理 7.12, 若取 (t_0,u_0) 的充分小邻域 $U\subset G$, 则连续可微映射

$$\Phi:(t,u)\to(x,y)=\Phi(t,u)=(\varphi(t,u),\psi(t,u))$$

是从 U 到平面上的点 $(x_0,y_0)=\Phi(t_0,u_0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 并且若将 Φ 的定义域限制为 U, 则 Φ 的逆映射 $\Phi^{-1}:(x,y)\to(t,u)$ 在 W 上连续可微. 从 W 到 $\mathbf{R}^3$ 的连续可微映射 $\Psi\circ\Phi^{-1}$ 显然可以表示为

$$\Psi\circ\Phi^{-1}:(x,y)\to(x,y,f(x,y)).$$

取充分小的 $\varepsilon>0$, 若 $U_\varepsilon=U_\varepsilon(t_0,u_0)$ 是 (t_0,u_0) 的 ε 邻域, 则 $[U_\varepsilon]\subset U$, 所以 $H=\Phi([U_\varepsilon])\subset W$ 是平面上的闭领域. 因此

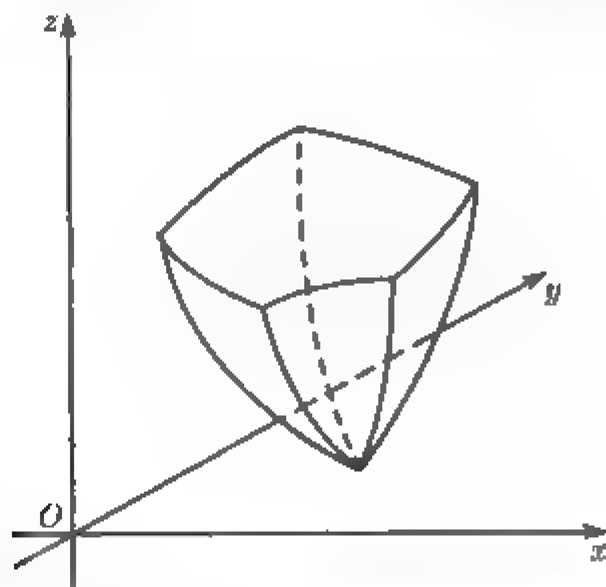
$$\Psi([U_\varepsilon])=\Psi(\Phi^{-1}(H))=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in H\}$$

是初等曲面.

如上, 对于每一个点 $(t,u)\in T$, 若取 ε 邻域 $U_\varepsilon(t,u)\subset G, \varepsilon=\varepsilon(t,u)>0$ 充分小, 则 $\Psi([U_\varepsilon(t,u)])$ 是初等曲面. 根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), $T\subset G$ 被这些 ε 邻域的有限个 $U_{\varepsilon(k)}(t_k,u_k), k=1,2,\cdots,m$ 所覆盖. 因此曲面 $S=\Psi(T)$ 被有限个初等曲面 $S_k=\Psi([U_{\varepsilon(k)}(t_k,u_k)]), k=1,2,\cdots,m$ 所覆盖. □

称空间 $\mathbf{R}^3$ 内的有限个光滑曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 的并集 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m$ 为**分段光滑曲面**. *分段光滑曲面 S 的体积为 0: $\omega(S)=0$.* 所以若有界闭领域 K 的

边界 $S = K - (K)$ 是分段光滑曲面, 则 K 是体积确定的. 下面的图是一个带有分段光滑边界的有界闭领域的例子.



以上是根据参数表示定义了曲面, 下面我们根据方程来定义曲面. 设 $\varphi(x,y,z)$ 是定义在某领域 $D \subset \mathbf{R}^3$ 上的连续可微函数, 若在 D 上恒有

$$\varphi(x,y,z)^2 + \varphi_x(x,y,z)^2 + \varphi_y(x,y,z)^2 + \varphi_z(x,y,z)^2 > 0, \tag{8.45}$$

我们将讨论由方程 $\varphi(x,y,z)$=0 确定的点集

$$S = \{(x,y,z) \in D | \varphi(x,y,z) = 0\}.$$

根据 (8.45) 式, 在每一点 $P = (x,y,z) \in S$ 处, 偏导函数 $\varphi_x(x,y,z)$, $\varphi_y(x,y,z)$, $\varphi_z(x,y,z)$ 中至少有一个不为 0. 所以不妨设在点 $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$ 处有 $\varphi_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. 则根据定理 8.2, 适当选取充分小的 $\varepsilon > 0, \delta > 0$, 使得

$$V_{\varepsilon,\delta}(P_0) = \{(x,y,z) | |x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

时, 在点 P_0 的邻域 $V_{\varepsilon,\delta}(P_0)$ 内, 方程 $\varphi(x,y,z)$=0 具有唯一的解 $z = f(x,y)$, 即

$$S \cap V_{\varepsilon,\delta}(P_0) = \{(x,y,f(x,y)) | |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta\}.$$

并且 $f(x,y)$ 是 x, y 的连续可微函数. 因此, 若

$$S_{P_0} = \{(x,y,f(x,y)) | |x - x_0| \leqslant \delta/2, |y - y_0| \leqslant \delta/2\},$$

则 S_{P_0} 是光滑初等曲面,

$$S \cap V_{\varepsilon,\delta/2}(P_0) = S_{P_0} \cap V_{\varepsilon,\delta/2}(P_0), \quad P_0 \in S_{P_0} \subset S.$$

以上我们讨论了 $\varphi_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 的情况, 对于 $\varphi_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 或者 $\varphi_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 的情况也完全相同. 因此对于每一点 $P\in S$, 存在满足 $P\in S_P\subset S$ 的光滑初等曲面 S_P, 使得在 P 的充分小的邻域 $U(P)$ 上

$$S\cap U(P)=S_P\cap U(P),\quad P\in S_P\subset S. \tag{8.46}$$

即在每一点 $P\in S$ 的充分小的邻域 $U(P)$ 内, S 与光滑初等曲面 S_P 一致. S 是有界闭集时, S 是有限个 S_P 的并集:

$$S=S_{P_1}\cup S_{P_2}\cup\cdots\cup S_{P_k}\cup\cdots\cup S_{P_m}.$$

这是因为根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), S 被 (8.46) 式邻域 $U(P)$ 的有限个: $U(P_1),U(P_2),\cdots,U(P_m)$ 所覆盖.

在 (8.46) 式的意义之下, 当有界闭集 $S\subset\mathbf{R}^3$ 在每一个点 P 的邻域上与光滑初等曲面 S_P 一致时, 称 S 为光滑闭曲面. 若上述方程 $\varphi(x,y,z)$=0 所确定的点集 $S=\{(x,y,z)\,|\,\varphi(x,y,z)=0\}$ 是有界闭集, 则 S 是光滑闭曲面. 因为 S 是有限个光滑初等曲面 $S_{P_1},S_{P_2},\cdots,S_{P_m}$ 的并集, 所以光滑闭曲面 S 是分段光滑的. 因此, 光滑闭曲面 S 的体积为 0: $\omega(S)=0$.

当 $\varphi(x,y,z)$ 是领域 D 上的连续可微且满足不等式 (8.45) 的函数时, 若不等式 $\varphi(x,y,z)\leqslant 0$ 所确定的点集 $K=\{(x,y,z)\in D\,|\,\varphi(x,y,z)\leqslant 0\}$ 是有界闭领域, 则其边界 S 是由方程 $\varphi(x,y,z)$=0 所确定的光滑闭曲面, 所以 K 是体积确定的. 球: $x^2+y^2+z^2-1\leqslant 0$, 椭圆体: $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1\leqslant 0$ 等都是有界闭领域的实例.

此结果对于由几个不等式所确定的有界闭领域也成立. 即 $\varphi_\lambda(x,y,z)(\lambda=1,2,\cdots,\nu)$ 是领域 D 上的连续可微函数. 当

$$K=\{(x,y,z)\in D|\varphi_\lambda(x,y,z)\leqslant 0,\quad \lambda=1,2,\cdots,\nu\}$$

是有界闭领域时, 若每个 $\varphi_\lambda(x,y,z)$ 满足不等式 (8.45), 则 K 是体积确定的. [证明] 令 $S_\lambda=\{(x,y,z)\in D\,|\,\varphi_\lambda\,(x,y,z)=0\}$, 则 K 的边界 $K-(K)$ 是有界闭集 $S_\lambda\cap K(\lambda=1,2,\cdots,\nu)$ 的并集. 根据 (8.46) 式, 每个 $S_\lambda\cap K$ 被有限个初等曲面 $S_{\lambda P_{\lambda k}},P_{\lambda k}\in S_\lambda\cap K,k=1,2,\cdots,m_\lambda$ 所覆盖. 所以 $K-(K)\subset\bigcup_{\lambda=1}^{\nu}\bigcup_{k=1}^{m_\lambda}S_{\lambda P_{\lambda k}}$. 因此 K 是体积确定的. □

注 曲线的参数表示中参数的定义域 I 总是实直线上的闭区间, 所以若想将曲线分割成有限条曲线, 只要将 I 分割成有限个闭区间即可. 正是因为这个原因, 我们才能简单地证明光滑曲线被分割成有限条初等曲线. 光滑曲面 S 的参数表示中, 参数的定义域 T 是平面上具有分段光滑边界的闭领域, 通过将 T 分割[①]成有限个闭

① 参照岩波基础数学选书《複素解析》§2.2.

领域来推得 S 被分割成有限个初等曲面并不容易. 因此仅证明了曲面 S 是被有限个初等曲面覆盖的 (8.44) 式. 很容易将平面上的闭领域的概念推广到空间 $\mathbf{R}^3$ 情况, 但是以 "闭领域" 为基础, 探究三元函数的积分论却很困难.

将上面对空间 $\mathbf{R}^3$ 内有界闭领域的叙述可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 内的有界闭领域的情况. 首先, 称定义在 $\mathbf{R}^{n-1}$ 内的有界闭领域 H 上的连续函数 $\varphi_1(x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $\varphi_2(x_1, x_3, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ 的图像:

$$\{(\varphi_1(x_2, x_3, \cdots, x_n), x_2, x_3, \cdots, x_n) | (x_2, x_3, \cdots, x_n) \in H\},$$
$$\{(x_1, \varphi_2(x_1, x_3, \cdots, x_n), x_3, \cdots, x_n) | (x_1, x_3, \cdots, x_n) \in H\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{(x_1, \cdots, x_{n-1}, \varphi_n(x_1, \cdots, x_{n-1})) | (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in H\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 内的**初等超曲面**. *初等超曲面 S 的容积为 0: $\omega(S) = 0$. 因此若 $\mathbf{R}^n$ 内的有界闭领域 K 的边界 $K - (K)$ 被有限个初等超曲面覆盖, 则 K 是容积确定的.*

其次, $\mathbf{R}^n$ 内的**光滑超曲面**可通过关于 n 的归纳法如下定义. 设 T 是 $\mathbf{R}^{n-1}$ 内的有界闭领域, 其边界由 $\mathbf{R}^{n-1}$ 内的有限个光滑超曲面组成. $\varphi_k(t) = \varphi_k(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})(t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}), k = 1, 2, \cdots, n)$ 是某领域 $G \supset T$ 上的连续可微函数, 并且每一点 $t = (t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) \in T$ 处的函数行列式

$$\frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{k-1}, \varphi_{k+1}, \cdots, \varphi_n)}{\partial(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_{n-1})}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

中至少有一个不为 0 时, 称点集

$$S = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots, x_n) | x_k = \varphi_k(t), \quad k = 1, \cdots, n, t \in T\} \tag{8.47}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 内的光滑超曲面. 并且 (8.47) 式称为超曲面 S 的参数表示, 称 $t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}$ 为参数. *光滑超曲面被有限个光滑初等超曲面覆盖. 因此 $\mathbf{R}^n$ 的光滑超曲面 S 的容积为 0: $\omega(S) = 0$.*

称 $\mathbf{R}^n$ 内有限个光滑超曲面的并集为分段光滑超曲面. 分段光滑超曲面的容积为 0. 因此, 若有界闭领域 K 的边界 $S = K - (K)$ 是分段光滑超曲面, 则 K 是容积确定的. 此时称 K 具有**分段光滑边界**.

通过领域 D 上的连续可微的函数 $\varphi_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\lambda = 1, 2, \cdots, \nu)$ 定义有界闭领域

$$K = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D | \varphi_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant 0, \quad \lambda = 1, 2, \cdots, \nu\}$$

时, *若在 D 上恒有*

$$\varphi_\lambda(x_1, \cdots, x_n)^2 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\lambda x_k}(x_1, \cdots, x_n)^2 > 0, \quad \lambda = 1, 2, \cdots, \nu,$$

则 K 是容积确定的

f) 函数序列和积分

定义在任意点集 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的函数序列 $\{f_m(P)\}(f_m(P) = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$, $m = 1, 2, \cdots)$ 的收敛和一致收敛的含义与一元函数序列的情况完全相同. 即在每一点 $P \in D$ 处序列 $\{f_m(P)\}$ 收敛时, 称函数 $f(P) = \lim_{m\to\infty} f_m(P)$ 为函数序列 $\{f_m(P)\}$ 的极限, 或者称函数序列 $\{f_m(P)\}$ 收敛于 $f(P)$. 此时, 在每一点 $P \in D$ 处, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $m_0(\varepsilon, P)$, 使得

$$\text{若 } m > m_0(\varepsilon, P), \quad \text{则} \quad |f_m(P) - f(P)| < \varepsilon$$

成立. 如果 $m_0(\varepsilon, P) = m_0(\varepsilon)$ 不依赖于点 $P \in D$ 而确定, 那么函数序列 $\{f_m(P)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(P)$.

关于一致收敛和连续性的定理 5.5, 从它的证明过程易见它同样对 n 元函数序列成立. 即, *若 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上连续的函数序列 $\{f_m(P)\}$ 在 D 上一致收敛于 $f(P)$, 则函数 $f(P)$ 在 D 上也连续.*

关于单调非增函数序列的 Dini 定理 (定理 5.7) 对 n 元函数序列也同样成立.

定理 8.8 以在有界闭集 $K \subset \mathbf{R}^n$ 上连续的函数 $f_m(P)$ 为项的单调非增函数序列 $\{f_m(P)\}$, 如果在 K 上收敛于连续函数 $f(P)$, 那么 $\{f_m(P)\}$ 在 K 上也一致收敛于 $f(P)$.

证明 因为定理 5.7 的证明仅基于有界点列含有收敛的子列 (定理 1.30), 所以它完全适用于 n 元函数的情况. □

关于实直线的闭区间上连续的一元函数序列的定理 5.8 及 Arzelà 定理 (定理 5.10), 对于 $\mathbf{R}^n$ 内容积确定的有界闭领域上连续的 n 元函数序列也成立.

定理 8.9 以在容积确定的有界闭领域 $K \subset \mathbf{R}^n$ 上连续的函数 $f_m(P) = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)(P = (x_1, x_2, \cdots, x_n), m = 1, 2, \cdots)$ 为项的函数序列 $\{f_m(P)\}$, 如果在 K 上一致收敛于 $f(P)$, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty} \int_K f_m(P)\mathrm{d}\omega, \quad f(P) = \lim_{m\to\infty} f_m(P). \tag{8.48}$$

证明 利用定理 8.6 和不等式 (8.35) 来证明, 其过程和定理 5.8 的相同. □

定理 8.10(Arzelà 定理) 在容积确定的有界闭领域 $K \subset \mathbf{R}^n$ 上, 函数 $f_m(P)$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$ 连续且一致有界, 即存在和 m 无关的常数 M, 使得当 $|f_m(P)| \leqslant M$ 恒成立时, 若函数序列 $\{f_m(P)\}$ 收敛, 并且其极限 $f(P)$ 在 K 上连续, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega = \lim_{m\to\infty} \int_K f_m(P)\mathrm{d}\omega, \quad f(P) = \lim_{m\to\infty} f_m(P).$$

证明 在以一元连续函数为项的函数序列 $\{f_m(x)\}$ 的情况下, Arzelà 定理的证明

可以归结于 Dini 定理的证明. 此证明虽然不简单, 但却是初等的, 也同样适用于以 n 元连续函数为项的函数序列 $\{f_m(P)\}$ 的情况. □

g) 积分号下的微积分

关于积分号下的微积分定理 6.19 可以推广如下：容积确定的有界闭领域 $K \subset \mathbf{R}^n$ 和闭区间 $[\alpha,\beta](\alpha<\beta)$ 的直积为

$$K \times [\alpha,\beta] = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)|(x_1,x_2,\cdots,x_n) \in K, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 是定义在 $K\times[\alpha,\beta]$ 上的有界函数, 并且固定 t 时, 它是 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的连续函数; 固定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时, 它是 t 的连续函数. 此时下面的定理成立.

定理 8.11 (1) $F(t)=\displaystyle\int_K f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 是闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上关于 t 的连续函数, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}t$ 是 K 上的关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的连续函数.

(2) 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 关于 t 可偏微, 偏导函数 $f_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 在 $K\times[\alpha,\beta]$ 上有界且关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 连续, 则 $F(t)=\displaystyle\int_K f(x_1,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 是关于 t 的可微函数, 其导函数由

$$F'(t)=\int_K f_t(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{8.49}$$

给出.

(3) 令

$$f(P,t)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t), \quad P=(x_1,x_2,\cdots,x_n), \quad \mathrm{d}\omega=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

则

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}t=\int_K\left(\int_\alpha^\beta f(P,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\omega. \tag{8.50}$$

证明 利用 Arzelà 定理 (定理 8.10), 与定理 6.19 的证明过程一样来证明即可. □

推论 $\Phi(x_1,\cdots,x_n,t)=\displaystyle\int_\alpha^t f(x_1,\cdots,x_n,t)\mathrm{d}t$ 是闭领域 $K\times[\alpha,\beta]$ 上的关于 $n+1$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,t$ 的连续函数.

证明 根据假设 $|f(x_1,\cdots,x_n,t)|\leqslant M$, M 是常数, 所以

$$|\Phi(x_1,\cdots,x_n,t)-\Phi(x_1,\cdots,x_n,\tau)|\leqslant M\cdot|t-\tau|,$$

因此

$$|\Phi(x_1,\cdots,x_n,t)-\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_n,\tau)|\leqslant M\cdot|t-\tau|+|\Phi(x_1,\cdots,x_n,\tau)-\Phi(\xi_1,\cdots,\xi_n,\tau)|$$

又根据上述的 (1), $\Phi(x_1,\cdots,x_n,\tau)$ 是 $x_1,\cdots,x_n$ 的连续函数. 因此 $\Phi(x_1,\cdots,x_n,t)$ 是 $x_1,\cdots,x_n,t$ 的连续函数. □

8.3 积分变量的变换

a) 累次积分

平面内的矩形 $K=\{(x,y)\,|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上的连续函数 $f(x,y)$ 在 K 上的积分作为累次积分, 用

$$\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

表示 (定理 7.3). 同理, $\mathbf{R}^n$ 内的区间 $K=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}$ 上的连续函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(P)(P=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 的积分作为累次积分用

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega=\int_{a_n}^{b_n}\mathrm{d}x_n\cdots\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1$$

表示. 这可以根据下面的定理直接获得.

定理 8.12 若

$$H=\{(x_1,\cdots,x_{n-1})|a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\cdots,a_{n-1}\leqslant x_{n-1}\leqslant b_{n-1}\}$$

则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}\omega=\int_{a_n}^{b_n}\mathrm{d}x_n\int_H f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1,\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.\tag{8.51}$$

证明 根据定理 8.11 的 (1), $\int_H f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$ 是关于 x_n 的连续函数. 若将区间 H 分割成小区间, 则在每个小区间上的积分, 中值定理 (8.34) 式成立. 因此定理的证明过程与定理 7.3 的证明一样. □

在 (8.51) 式中, 若将 n 换成 $n+1$; x_{n+1} 换成 t; a_{n+1},b_{n+1} 分别换成 a,b; $f(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})$ 换成 $f(P,t)$; $\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 换成 $\mathrm{d}\omega$, 则 (8.51) 式变为

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_a^b\mathrm{d}t\int_H f(P,t)\mathrm{d}\omega.\tag{8.52}$$

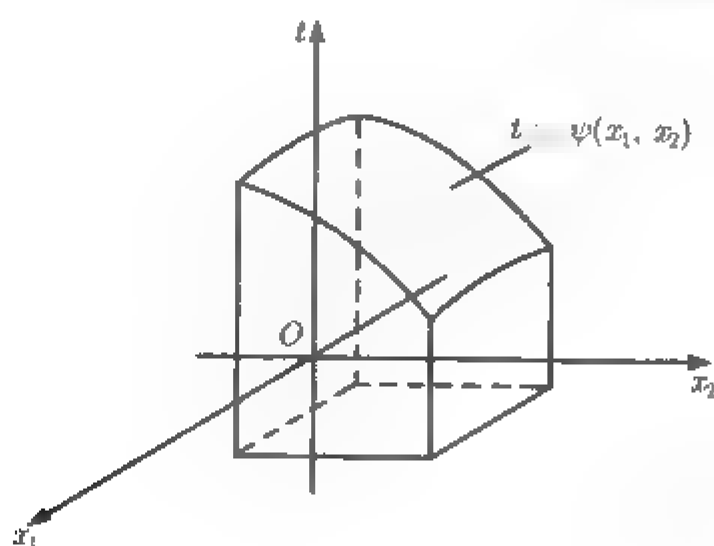
因此, 根据 (8.50) 式,

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_H\mathrm{d}\omega\int_a^b f(P,t)\mathrm{d}t.\tag{8.53}$$

下面讨论 7.2 节 d) 的累次积分的推广. 设 $H=\{(x_1,\cdots,x_n)\,|a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的区间, $\psi(P)=\psi(x_1,x_2,\cdots,x_n)(P=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 是在 H 上连续且满足 $\psi(P)>a$(a 是常数) 的函数, 若令

$$K=\{(P,t)|P\in H,\quad a\leqslant t\leqslant\psi(P)\},$$

则 K 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的有界闭领域. 这里, (P,t) 表示 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$. K 的边界由 $2n+2$ 个初等超曲面组成. 其中的一个是 $\{(P,\psi(P))\,|\,P\in H\}$, 其他的为超平面: $x_k=a_k, x_k=b_k$, $k=1,2,\cdots,n$, 和 $t=a$. 所以 K 是容积确定的.



定理 8.13 若 $f(P,t)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 是 K 上的连续函数, 则等式

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_H \mathrm{d}\omega\int_a^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t \tag{8.54}$$

成立.

此定理 8.13 是定理 7.10 的推广. 若令 $f(P,t)=1$, 则 (8.54) 式变成

$$\omega(K)=\int_H(\psi(P)-a)\mathrm{d}\omega. \tag{8.55}$$

此式左边的 $\omega(K)$ 表示闭领域 K 在 $\mathbf{R}^{n+1}$上的容积.

证明 同定理 7.10 的证明一样, 首先根据连续函数 $\psi(P)-a$ 在区间 H 上的积分定义有 (8.55) 式成立. 其次取常数 b, 使得恒有 $\psi(P)<b$, 若当 $a\leqslant t\leqslant\psi(P)$ 时, 令 $\tilde{f}(P,t)=f(P,t)$; 当 $\psi(P)\leqslant t\leqslant b$ 时, 令 $\tilde{f}(P,t)=g(P), g(P)=f(P,\psi(P))$, 则将 K 上的连续函数 $f(P,t)$ 延拓到区间 $H\times[a,b]$ 上的连续函数 $\tilde{f}(P,t)$. 根据 (8.53) 式,

$$\int_{H\times[a,b]}\tilde{f}(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_H\mathrm{d}\omega\int_a^b\tilde{f}(P,t)\mathrm{d}t.$$

因此, 用与定理 7.10 相同的证明方法, 等式 (8.54) 可以归结到等式

$$\int_K g(P)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_H g(P)(\psi(P)-a)\mathrm{d}\omega \tag{8.56}$$

上.

若将区间 H 分割成有限个充分小的区间 $H_k, k=1,2,\cdots,m$, 则相应地 K 被分割成闭领域 $K_k=\{(P,t)|P\in H_k, a\leqslant t\leqslant\psi(P)\}$, $k=1,2,\cdots,m$. 根据推广的中

值定理 (8.33) 式和 (8.55) 式, 对于每一个 k, 存在点 $\Xi_k \in H_k$, 使得

$$\int_{H_k} g(P)(\psi(P)-a)\mathrm{d}\omega = g(\Xi_k)\omega(K_k).$$

因此根据定理 8.5,

$$\int_K g(P)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t - \int_H g(P)(\psi(P)-a)\mathrm{d}\omega = \sum_{k=1}^{m}\int_{K_k}(g(P)-g(\Xi_k))\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t.$$

因为 $g(P)$ 在闭区间 H 上一致连续, 所以对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 若取充分小的各区间 H_k, 则当 $P \in H_k$ 时, 就有 $|g(P)-g(\Xi_k)| < \varepsilon$ 成立. 因此

$$\left|\int_K g(P)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t - \int_H g(P)(\psi(P)-a)\mathrm{d}\omega\right| < \varepsilon\omega(K).$$

故 (8.56) 式成立. □

推论 设 $\varphi(P)$, $\psi(P)$ 是区间 H 上的连续函数, 并且在 (H) 上恒有 $\varphi(P) < \psi(P)$, 令

$$K = \{(P,t)|P \in H, \quad \varphi(P) \leqslant t \leqslant \psi(P)\}.$$

若 $f(P,t)$ 是闭领域 K 上的连续函数, 则

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \int_H \mathrm{d}\omega\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t. \tag{8.57}$$

可以将这个推论推广到 H 是容积确定的任意有界闭领域的情况.

定理 8.14 设 H 是 $\mathbf{R}^n$ 内的容积确定的有界闭领域, $\varphi(P)$ 和 $\psi(P)$ 是 H 上的连续函数. 当在 (H) 上恒有 $\varphi(P) < \psi(P)$ 时, 令

$$K = \{(P,t)|P \in H, \quad \varphi(P) \leqslant t \leqslant \psi(P)\},$$

则 K 也是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的容积确定的有界闭领域, 并且对于 K 上的连续函数 $f(P,t)$, 等式

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \int_H \mathrm{d}\omega\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t \tag{8.58}$$

成立.

证明 K 的边界 $K-(K)$ 由点集 $S=\{(P,t)\,|P \in H-(H), \varphi(P) \leqslant t \leqslant \psi(P)\}$ 和两个初等超曲面 $\{(P,\varphi(P))\,|P \in H\}$, $\{(P,\psi(P))\,|P \in H\}$ 组成. 因为初等超曲面的容积为 0, 所以要证明 K 是容积确定的只须证明 S 的容积为 0 即可. 若 H 上 $\varphi(P)$ 的最小值为 α, $\psi(P)$ 的最大值为 β, 则

$$S \subset [H-(H)] \times [\alpha,\beta],$$

因此只须证明 $[H-(H)]\times[\alpha,\beta]$ 的容积为 0 即可. 根据假设, H 在 $\mathbf{R}^n$ 上是容积确定的, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在满足 $H-(H)\subset B, \omega(B)<\varepsilon$ 的 $\mathbf{R}^n$ 内的区间块 B.

$$[H-(H)]\times[\alpha,\beta]\subset B\times[\alpha,\beta],$$

并且 $\mathbf{R}^{n+1}$ 内的区间块 $B\times[\alpha,\beta]$ 的容积为 $(\beta-\alpha)\omega(B)<(\beta-\alpha)\varepsilon$. 因此, $[H-(H)]\times[\alpha,\beta]$ 的容积为 0.

根据引理 8.4, 可以选取从内部单调收敛于 (H) 的区间块序列 $\{H_\nu\}$, 使得每一个 H_ν 是有界闭领域. 若对于 H_ν, 令

$$K_\nu=\{(P,t)|P\in H_\nu,\quad \varphi(P)\leqslant t\leqslant\psi(P)\},$$

则 K_ν 是有界闭领域. 若将区间块 H_ν 分割成有限个区间, 则相应地 K_ν 也被分割成有限个闭领域. 当 H 是区间时, 等式 (8.57) 成立. 因此, 根据定理 8.5,

$$\int_{K_\nu} f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\int_{H_\nu}\mathrm{d}\omega\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t.$$

其中, $\displaystyle\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t$ 是根据定理 8.11 的 (1) 得到的关于 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的连续函数. 根据广义积分的定义 (8.13) 式和 (8.24) 式,

$$\int_H\mathrm{d}\omega\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t=\lim_{\nu\to\infty}\int_{H\nu}\mathrm{d}\omega\int_{\varphi(P)}^{\psi(P)} f(P,t)\mathrm{d}t.$$

故要证明此定理只须验证

$$\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t=\lim_{\nu\to\infty}\int_{K_\nu} f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t$$

即可. 因为

$$(H)=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}(H_\nu),\quad (K_\nu)=\{(P,t)|P\in(H_\nu),\quad \varphi(P)<t<\psi(P)\},$$

所以 $(K)=\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty}(K_\nu)$. 又因为 $\{H_\nu\}$ 是 "单调递增" 的, 所以 $\{K_\nu\}$ 也单调递增, 即 $(K_1)\subset(K_2)\subset\cdots\subset(K_\nu)\subset\cdots$. 因此若$\{A_m\}$是从内部单调收敛于 (K) 的区间块序列, 则根据 Heine-Borel 覆盖定理有, 对于每一个 m, 存在 $\nu(m)$ 使得当 $\nu\geqslant\nu(m)$ 时, $A_m\subset(K_\nu)$. 因此 $A_m\subset K_\nu\subset K$, 所以根据 (8.28) 式,

$$\int_{A_m}|f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\leqslant\int_{K_\nu}|f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\leqslant\int_K|f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t.$$

另一方面, 根据广义积分的定义,

$$\int_K |f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \int_{(K)} |f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty}\int_{A_m} |f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t.$$

因此

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{K_\nu} |f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t = \int_K |f(P,t)|\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t,$$

从而根据 (8.29) 式,

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\int_K f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t - \int_{K_\nu} f(P,t)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}t\right| = 0.$$

□

在 (8.58) 式中, 令 $f(P,t)=1$, 则获得 K 的容积公式

$$\omega(K) = \int_H (\psi(P)-\varphi(P))\mathrm{d}\omega. \tag{8.59}$$

特别地, 当 K 是空间 $\mathbf{R}^3$ 内的闭领域时, 若将 (P,t) 改写成 (x,y,z), 则 (8.58) 式、(8.59) 式分别变成

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_H \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{8.60}$$

$$\omega(K) = \int_H (\psi(x,y)-\varphi(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8.61}$$

例 8.2　举一个极简单的例子. 计算 $\mathbf{R}^3$ 内的以原点 O 为中心、R 为半径的球 K: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的体积. 因为

$$K=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leqslant R^2,\quad -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\},$$

所以根据 (8.61) 式,

$$\omega(K) = \int_{x^2+y^2\leqslant R^2} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x = r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 并且将 x,y 变换成极坐标 r,θ, 则根据例 7.5, 得

$$\omega(K) = \int_0^R\int_0^{2\pi} 2\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 4\pi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}r\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

这是我们所熟知的结果.

设 $\lambda(x),\mu(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的关于 x 的连续函数, 当 $a<x<b$ 时, $\lambda(x)<\mu(x)$. 若 $H=\{(x,y)\,|a\leqslant x\leqslant b,\lambda(x)\leqslant y\leqslant\mu(x)\}$, 则根据定理 8.11 的推

论, $\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ 是关于 x, y 的连续函数, 所以根据累次积分的公式 (7.50), (8.60) 式可以改写为

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\lambda(x)}^{\mu(x)} \mathrm{d}y \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

因此, 若令

$$K_x = \{(y,z)|\lambda(x) \leqslant y \leqslant \mu(x), \quad \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\},$$

则根据 (7.50) 式, 得

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{K_x} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{8.62}$$

此时

$$K = \{(x,y,z)|a \leqslant x \leqslant b, \quad \lambda(x) \leqslant y \leqslant \mu(x), \quad \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}, \tag{8.63}$$

并且, 闭区域

$$K_x = \{(y,z)|(x,y,z) \in K\} \tag{8.64}$$

表示通过点 $(x,0,0)$ 与 x 轴正交的 $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 内的平面 $x \times \mathbf{R}^2$ 上的 K 的 "截面", 即

$$x \times K_x = K \cap x \times \mathbf{R}^2.$$

若在 (8.63) 式中交换 y 和 z, 则有

$$K = \{(x,y,z)|a \leqslant x \leqslant b, \quad \lambda(x) \leqslant z \leqslant \mu(x), \quad \varphi(x,z) \leqslant y \leqslant \psi(x,z)\}. \tag{8.65}$$

对于这种形式的闭领域 K, 令 $K_x = \{(y,z)|(x,y,z) \in K\}$, 则累次积分公式 (8.62) 依然成立.

设 $K \subset \mathbf{R}^3$ 是有界闭领域, 并且将 K 分割成有限个闭领域 $K_j, j = 1, 2, \cdots, m$. 若 K_j 可以写成 (8.63) 式或者 (8.65) 式的形式:

$$K_j = \{(x,y,z)|a_j \leqslant x \leqslant b_j, \quad \lambda_j(x) \leqslant y \leqslant \mu_j(x), \quad \varphi_j(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_j(x,y)\}$$

或者

$$K_j = \{(x,y,z)|a_j \leqslant x \leqslant b_j, \quad \lambda_j(x) \leqslant z \leqslant \mu_j(x), \quad \varphi_j(x,z) \leqslant y \leqslant \psi_j(x,z)\},$$

则对于 K 上的连续函数 $f(x,y,z)$, 累次积分公式

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{K_x} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{8.66}$$

成立. 这里, $a = \min_j a_j$, $b = \max_j b_j$, $K_x = \{(y,z)\,|(x,y,z) \in K\}$.

[证明] 根据 (8.62) 式,

$$\int_{K_j} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_j}^{b_j} \mathrm{d}x \int_{K_{jx}} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

当 $K_{jx} = \{(y,z)\,|(x,y,z) \in K_j\}$ 是空集时, 若令 $\int_{K_{jx}} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$, 则有

$$\int_{K_j} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{K_{jx}} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

若对该等式两边取和: $\sum_{j=1}^{m}$, 可直接得到 (8.66) 式. □

一般地, 即使有界闭领域 $K \subset \mathbf{R}^3$ 的体积确定, 也未必有 K_x 的面积确定. 另外即使 K_x 的面积确定, 也未必有 $\int_{K_x} f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是关于 x 的分段连续函数, 所以公式 (8.66) 右边的积分未必能够有定义①.

例 8.3　$\mathbf{R}^3$ 内的以原点 O 为中心、R 为半径的球用

$$K = \{(x,y,z)||x| \leqslant R, \quad |y| \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}, \quad |z| \leqslant \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\}$$

来表示. 则 K 是 (8.63) 式形式的闭领域. 在 x 轴上给定一点 $P = (\rho, 0, 0), \rho \geqslant 0$, 并且设点 (x,y,z) 与 P 的距离的倒数为

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x-\rho)^2 + y^2 + z^2}},$$

计算 $f(x,y,z)$ 在 K 上的积分. 根据公式 (8.66),

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{K_x} \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-\rho)^2 + y^2 + z^2}}. \tag{8.67}$$

当 $(x,y,z) \to P$ 时, $f(x,y,z) \to +\infty$. 当 $P \in K$ 时, 若考虑

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{(K)-\{P\}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

① 根据 Lebesgue 积分论, K 是体积确定时, 累积分公式 (8.66) 是恒成立的. 参照岩波基础数学选书, 《現代解析入門》续篇《測度と積分》, §6.3.

则积分绝对收敛且 (8.67) 式成立. 因为 K_x 是以 $(0,0)$ 为中心、$\sqrt{R^2-x^2}$ 为半径的闭圆盘: $y^2+z^2 \leqslant R^2-x^2$, 所以若令 $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, $r^2=t$, 则

$$\begin{aligned}\int_{K_x}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-\rho)^2+y^2+z^2}} &= \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(x-\rho)^2+r^2}}\\ &= \pi\int_0^{R^2-x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(x-\rho)^2+t}}\\ &= 2\pi(\sqrt{(x-\rho)^2+R^2-x^2}-\sqrt{(x-\rho)^2}).\end{aligned}$$

因此

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\pi\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2+\rho^2-2\rho x}-|x-\rho|)\mathrm{d}x.$$

对上式右边的积分, 将 $0\leqslant\rho<R$ 和 $\rho\geqslant R$ 两种情况分开来计算, 则得

$$\int_K\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-\rho)^2+y^2+z^2}} = \begin{cases} 2\pi R^2-\dfrac{2\pi}{3}\rho^2, & 0\leqslant\rho<R,\\ \dfrac{4\pi R^3}{3\rho}, & \rho\geqslant R.\end{cases}$$

假定 K 是由均匀的物质组成的球体, 则此积分表示 (除去比例常数)K 是生成重力场的点 $P=(\rho,0,0)$ 处的势.

b) 积分变量的变换

考察领域 $E\subset\mathbf{R}^n$ 到领域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续可微一一映射

$$\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\cdots,\varphi_n(u)).$$

这里, $\varphi_k(u)=\varphi_k(u_1,u_2,\cdots,u_n)(u=(u_1,u_2,\cdots,u_n))$ 是 E 上的 n 个变量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的连续可微函数. 设 Φ 的函数行列式为

$$J(u)=J(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\frac{\partial(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\cdots,\varphi_n(u))}{\partial(u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n)},$$

并且在 E 上恒有 $J(u)\neq 0$. 则 $J(u)$ 是 E 上的连续函数, 所以恒有 $J(u)>0$, 或者恒有 $J(u)<0$, 两者必居其一. 根据定理 8.3, Φ 的逆映射

$$\Phi^{-1}:P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(u_1,u_2,\cdots,u_n)=(u_1(P),u_2(P),\cdots,u_n(P))$$

在 D 上连续可微. 若 Φ 是 n 个实数的组 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in E$ 和点 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$ 之间的一一映射, 则 D 的每一点 P 可以由 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 唯一确定, 所以 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 可以看成是点 $P=\Phi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的新坐标. 因此 Φ^{-1} :

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 是将点 P 的原坐标 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变换成新坐标 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的坐标变换.

设 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是定义在领域 $D=\Phi(E)$ 上的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的连续函数, 则 $f(\Phi(u))=f(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\cdots,\varphi_n(u))$ 是定义在 E 上的 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的连续函数. 此时有与定理 7.13 一样形式的换元积分公式成立. 即

定理 8.15

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_E |f(\Phi(u))|\cdot|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n, \tag{8.68}$$

并且当 $\int_D |f(P)|\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n<+\infty$ 时,

$$\int_D f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_E f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1 du_2\cdots\mathrm{d}u_n. \tag{8.69}$$

证明[①] (1) 首先 Φ 是两个连续可微映射 Φ_1 和 Φ_2 的复合映射: $\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2$ 时, 若定理 8.15 关于 Φ_1 和 Φ_2 都成立, 则可以验证它关于 Φ 也成立. 为此, 若在 $\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2$ 中

$$\Phi_1:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(v_1,v_2,\cdots,v_n)=\Phi_1(u_1,u_2,\cdots,u_n)$$

是 E 到某领域 $G\subset\mathbf{R}^n$ 上的映射, 则

$$\Phi_2:(v_1,v_2,\cdots,v_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\Phi_2(v_1,v_2,\cdots,v_n)$$

是从 G 到 D 上的映射. 因为 $\Phi=\Phi_2\circ\Phi_1$ 是一一映射, 所以 Φ_1 及 Φ_2 都是一一映射. 若 Φ_1 和 Φ_2 的函数行列式分别是

$$J_1(u)=\frac{\partial(v_1,\cdots,v_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)},\quad J_2(v)=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(v_1,\cdots,v_n)},$$

则 $\Phi=\Phi_2\circ\Phi_1$ 的函数行列式为

$$J(u)=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}=J_2(v)\cdot J_1(u)=J_2(\Phi_1(u))\cdot J_1(u).$$

根据假设,

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_G |f(\Phi_2(v))|\cdot|J_2(v)|\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n,$$

并且若 $g(v)=f(\Phi_2(v))J_2(v)$, 则

$$\int_G |g(v)|\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\cdots\mathrm{d}v_n=\int_E |g(\Phi_1(u))|\cdot|J_1(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

① 对于二元函数我们是在 $J(u)>0$ 的假设下证明了定理 7.13, 但在此处为了方便起见是在 $J(u)\neq 0$ 的假设下证明定理 8.15, 将 $J(u)$ 换成 $|J(u)|$ 正是这个原因.

所以

$$g(\Phi_1(u))J_1(u) = f(\Phi_2(\Phi_1(u)))J_2(\Phi_1(u))J_1(u) = f(\Phi(u))J(u),$$

因此

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_E |f(\Phi(u))|\cdot|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

同理, 在 $\int_D |f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n < +\infty$ 的情况下,

$$\int_D f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_E f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

(2) 与 8.1 节定理 8.3 的证明相同, Φ 是

$$\Phi : (u_1,\cdots,u_n) \to (x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n) = (\varphi_1(u),\cdots,\varphi_m(u),u_{m+1},\cdots,u_n)$$

形式的映射, 即 $\varphi_{m+1}(u) = u_{m+1},\cdots,\varphi_n(u) = u_n$ 恒成立时, 用关于 m 的归纳法证明定理 8.15①. 此时,

$$J(u_1,u_2,\cdots,u_n) = \frac{\partial(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_m(u))}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}. \tag{8.70}$$

如 8.2 节 d) 中所述, 将领域 $E \subset \mathbf{R}^n$ 分割成无数个区间 $L_1,L_2,\cdots,L_h,\cdots$. 根据 (8.17) 式,

$$\int_E |f(\Phi(u))|\cdot|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = \sum_{h=1}^{\infty}\int_{L_h}|f(\Phi(u))|\cdot|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n,$$

并且根据 (8.18) 式, 当上式右边的级数收敛时

$$\int_E f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = \sum_{h=1}^{\infty}\int_{L_h} f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

若 $K_h = \Phi(L_h)$, 则 $D = \Phi(E)$ 被分割成无数个有界闭领域 $K_1,K_2,\cdots,K_h,\cdots$. 因为每一个 K_h 都具有分段光滑的边界, 从而它是容积确定的. 因此根据定理 8.7,

$$\int_D |f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \sum_{h=1}^{\infty}\int_{K_h}|f(P)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

当右边的级数收敛时,

$$\int_D f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \sum_{h=1}^{\infty}\int_{K_h} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

---

① 7 3 节 c) 中是在 "不定积分" 的基础上证明了定理 7.13, 为此计算了 8 个闭区域 $K_1,K_2,\cdots,K_8$ 上的积分 要用相同的方法证明定理 8.15 就必须计算所有的 $n=3$ 的情况, 即 26 个闭领域上的积分, 这实际上是不可能的.

因此若要证明定理 8.15, 只须对于每一个 h 证明等式

$$\int_{K_h} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{L_h} f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \tag{8.71}$$

成立即可.

(3) 当 $m=1$ 时, 从定理 8.13 的推论 (8.57) 式, 可如下容易地推出等式 (8.71). 此时

$$\Phi:(u_1,u_2,\cdots,u_n)\to(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\varphi_1(u),u_2,\cdots,u_n),$$

又因为 $x_2=u_2,\cdots,x_n=u_n$, 所以若从一开始就将变量 $u_2,\cdots,u_n$ 写成 $x_2,\cdots,x_n$, 则映射 Φ 表示为:

$$\Phi:(u_1,x_2,\cdots,x_n)\to(\varphi_1(u_1,x_2,\cdots,x_n),x_2,\cdots,x_n).$$

取区间 L_h 中的一个为

$$L=\{(u_1,x_2,\cdots,x_n)|a_1\leqslant u_1\leqslant b_1,\quad a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\},$$

为方便起见, 令 $Q=(x_2,\cdots,x_n)$, $H=\{Q|a_2\leqslant x_2\leqslant b_2,\cdots,a_n\leqslant x_n\leqslant b_n\}, a=a_1, b=b_1$, 并且将上式表示为

$$L=[a,b]\times H=\{(u_1,Q)|a\leqslant u_1\leqslant b, Q\in H\}.$$

则对应的 K_h 用

$$K=\Phi(L)=\{(x_1,Q)|x_1=\varphi_1(u_1,Q),\quad a\leqslant u_1\leqslant b, Q\in H\}$$

表示. 根据 (8.70) 式,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\varphi_1(u_1,Q)=J(u_1,Q)\neq 0,$$

所以恒有 $\partial\varphi_1(u_1,Q)/\partial u_1>0$ 或者恒有 $\partial\varphi_1(u_1,Q)/\partial u_1<0$. 首先考虑恒有 $\partial\varphi_1(u_1,Q)/\partial u_1>0$ 的情况. 则 $x_1=\varphi_1(u_1,Q)$ 是 u_1 的单调递增函数, 所以若 $\varphi(Q)=\varphi_1(a,Q)$, $\psi(Q)=\varphi_1(b,Q)$, 则

$$K=\{(x_1,Q)|\varphi(Q)\leqslant x_1\leqslant\psi(Q), Q\in H\}.$$

因此根据 (8.57) 式,

$$\int_K f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_H \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\int_{\varphi(Q)}^{\psi(Q)} f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1.$$

在积分 $\int_{\varphi(Q)}^{\psi(Q)} f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1$ 中, 令 $x_1=\varphi_1(u_1,Q)$, 将积分变量 x_1 变换成 u_1, 则根据换元积分公式 (4.56),

$$\int_{\varphi(Q)}^{\psi(Q)} f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1=\int_a^b f(\varphi_1(u_1,Q),Q)\varphi_1'(u_1,Q)\mathrm{d}u_1.$$

又因为 $\varphi_1'(u_1,Q)=\partial\varphi_1(u_1,Q)/\partial u_1=J(u_1,Q)$, 所以

$$\int_K f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_H \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\int_a^b f(\varphi_1(u_1,Q),Q)J(u_1,Q)\mathrm{d}u_1.$$

将此式右边的积分变量 $x_2,\cdots,x_n$ 换成 $u_2,\cdots,u_n$, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_H \mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n\int_a^b f(\varphi_1(u),u_2,\cdots,u_n)J(u)\mathrm{d}u_1.$$

因此根据 (8.53) 式,

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_L f(\Phi(u))J(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

即等式 (8.71) 成立.

当 $\partial\varphi_1(u_1,Q)/\partial u_1<0$ 恒成立时,

$$K=\{(x_1,Q)|\psi(Q)|\leqslant x_1\leqslant\varphi(Q),\quad Q\in H\},$$

所以

$$\int_K f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_H \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\int_{\psi(Q)}^{\varphi(Q)} f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1.$$

又因为 $\varphi_1'(u_1,Q)=J(u_1,Q)=-|J(u_1,Q)|$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\psi(Q)}^{\varphi(Q)} f(x_1,Q)\mathrm{d}x_1&=\int_b^a f(\varphi_1(u_1,Q),Q)\varphi_1'(u_1,Q)\mathrm{d}u_1\\&=-\int_b^a f(\varphi_1(u_1,Q),Q)|J(u_1,Q)|\mathrm{d}u_1\\&=\int_a^b f(\varphi_1(u_1,Q),Q)|J(u_1,Q)|\mathrm{d}u_1.\end{aligned}$$

因此此时 (8.71) 式也成立.

从而, 当 $m=1$ 时, 定理 8.15 成立.

(4) 设连续可微映射

$$\Phi_1:u\to(x_1,x_2,\cdots,x_m,x_{m+1},\cdots,x_n)=(u_1,\varphi_2(u),\cdots,\varphi_m(u),u_{m+1},\cdots,u_n)$$

是从 E 到领域 G 上是一一映射, 逆映射 Φ_1^{-1} 在 G 上连续可微. 若 $\Psi = \Phi \circ \Phi_1^{-1}$, 则

$$\begin{aligned}\Psi : &(u_1, \varphi_2(u), \cdots, \varphi_m(u), u_{m+1}, \cdots, u_n)\\ &\to (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_m(u), u_{m+1}, \cdots, u_n)\end{aligned}$$

是从 G 到 D 上的一一连续可微映射, 表示为

$$\Psi : (u_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \to (\Psi(u_1, x_2, \cdots, x_n), x_2, x_3, \cdots, x_n).$$

因为 $\Phi = \Psi \circ \Phi_1$, 所以根据归纳假设, 无论对于 Φ_1, 还是对于 Ψ, 定理 8.15 都成立. 因此根据 (1), 定理 8.15 对于 Φ 也成立.

对于某 $\lambda, 2 \leqslant \lambda \leqslant m$, 映射

$$\Phi_\lambda : u \to (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) = (u_\lambda, \varphi_2(u), \cdots, \varphi_m(u), u_{m+1}, \cdots, u_n)$$

是从 E 到某领域 G 上的一一映射, 逆映射 Φ_λ^{-1} 在 G 上连续可微时, 定理 8.15 也同样对 Φ 成立.

(5) 一般情况. 为了证明定理 8.15, 只须对于每一个 h, 证明等式 (8.71) 式成立即可. 即等式

$$\int_{(K_h)} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{(L_h)} f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

成立. 所以根据 (4), 当 E 被分割成无数个充分小的区间 $L_1, L_2, \cdots, L_h, \cdots$ 时, 对于每一个 L_h 至少存在一个映射 Φ_λ 是从 (L_h) 到某领域 $G_h \subset \mathbf{R}^n$ 的一一映射, 若将 Φ_λ 的定义域限制到 (L_h) 上, 则只须验证其逆映射 Φ_λ^{-1} 在 G_h 上连续可微即可.

根据 (8.70) 式, 映射 Φ_λ 的函数行列式为

$$J_\lambda(u) = (-1)^{\lambda-1}\frac{\partial(\varphi_2(u), \varphi_3(u), \cdots, \varphi_m(u))}{\partial(u_1, \cdots, u_{\lambda-1}, u_{\lambda+1}, \cdots, u_m)}.$$

根据假设,

$$\frac{\partial(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_m(u))}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_\lambda, \cdots, u_m)} = J(u) \neq 0,$$

所以, 若将左边的行列式关于第一行展开, 则得

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_\lambda}\cdot J_\lambda(u) = J(u) \neq 0.$$

因此在每一点 $u_0 \in E$ 处, 行列式 $J_\lambda(u^0), \lambda = 1, 2, \cdots, m$ 中至少有一个不为 0. 若 $J_\lambda(u^0) \neq 0$, 则根据 8.1 节引理 8.2 有, Φ_λ 是从 u^0 的充分小的 ε 邻域 $U_\varepsilon(u^0) \subset E(\varepsilon >$

0) 到 $\Phi_\lambda(u^0)$ 的一个邻域 W 上的一一映射. 并且若将 Φ_λ 的定义域限制到 $U_\varepsilon(u^0)$ 上, 则逆映射 Φ_λ^{-1} 在 W 上连续可微. 若对于所有的点 $u^0\in E$ 都分别如上确定邻域 $U_\varepsilon(u^0)$, 则其全体 $\mathscr{U}=\{U_\varepsilon(u^0)|u_0\in E\}$ 构成 E 的开覆盖. 这里, $U_\varepsilon(u^0)$ 中的 ε 显然依赖于 u^0. 根据 Heine-Borel 覆盖定理 (定理 1.28), 任意的区间块 $A\subset E$ 被有限个 $U_\varepsilon(u^0)\in\mathscr{U}$ 所覆盖. 因此若将 E 分割成无数个充分小的区间 $L_1,L_2,\cdots,L_h,\cdots$, 则每个区间 L_h 分别被一个邻域 $U_\varepsilon(u^0)\in\mathscr{U}$ 所包含: $L_h\subset U_\varepsilon(u^0)$. 对于邻域 $U_\varepsilon(u^0)$, 至少有一个 Φ_λ 是从 $U_\varepsilon(u^0)$ 到 W 上的一一映射, 并且 Φ_λ^{-1} 在 W 上连续可微. 从而这个 Φ_λ 是从 (L_h) 到 $G_h=\Phi_\lambda((L_h))\subset W$ 上的一一映射, 并且逆映射 Φ_λ^{-1} 在 G_h 上连续可微. □

设 $K\subset D$ 是具有分段光滑边界的有界闭领域, 若 $L=\Phi^{-1}(K)\subset E$, 则 L 也是具有分段光滑边界的有界闭领域, 从而 K 和 L 都是容积确定的.

定理 8.16 若 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)(P=(x_1,x_2,\cdots,x_n))$ 是 K 上的连续函数, 则

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_L f(\Phi(u))|J(u)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n. \tag{8.72}$$

(8.68) 式、(8.69) 式和 (8.72) 式都是关于 n 重积分的**换元公式**. 在 (8.68) 式和 (8.72) 式中, 若令 $f(P)=1$, 则同二重积分时一样, 有

$$\omega(D)=\int_E |J(u_1,u_2,\cdots,u_n)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n,\quad E=\Phi^{-1}(D), \tag{8.73}$$

$$\omega(K)=\int_L |J(u_1,u_2,\cdots,u_n)|\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n,\quad L=\Phi^{-1}(K). \tag{8.74}$$

以上从领域 E 到领域 D 上的连续可微的映射 Φ 是一一映射时, Φ 的函数行列式 $J(u)$ 在 E 上恒 $\neq 0$, 但是 Φ 未必是一一映射. 另外若考虑在 E 的若干点 u 处 $J(u)=0$ 的情况, 则在应用上比较便利.

设 $\Phi:(u_1,\cdots,u_n)\to(x_1,\cdots,x_n)=(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_n(u))$ 是领域 E 到领域 D 上的连续可微映射, $K\subset D$ 是具有分段光滑边界的有界闭领域, $K=\Phi(L)(L\subset E)$ 也是具有分段光滑边界的有界闭领域. 并且 Φ 的函数行列式用 $J(u)$ 来表示

定理 8.17 将 L 分割成具有有限个分段光滑边界的闭领域 $L_1,L_2,\cdots,L_\lambda,\cdots L_\nu$, 如果下列条件

(1) 在每个 L_λ 的开核 (L_λ) 上恒有 $J(u)>0$;

(2) $K_\lambda=\Phi(L_\lambda)$ 是具有分段光滑边界的闭领域;

(3) $\Phi((L_\lambda))=(K_\lambda)$ 且在 (L_λ) 上 Φ 是一一映射;

(4) 当 $\lambda\neq\rho$ 时, $(K_\lambda)\cap(K_\rho)=\varnothing$

成立, 则对于 K 上的任意连续函数 $f(P)$, $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 换元公式

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_L f(\Phi(u))J(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n \tag{8.75}$$

成立.

证明 因为当 $\lambda \neq \rho$ 时, $(K_\lambda) \cap (K_\rho) = \varnothing$, 所以 K 被分割成具有分段光滑边界的闭领域 $K_1, K_2, \cdots, K_\nu$. 如 8.2 节 e) 中所述, 具有分段光滑边界的有界闭领域是容积确定的, 所以根据定理 8.5 和广义积分的定义 (8.24) 式,

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{(K_\lambda)} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

同理可得

$$\int_L f(\Phi(u))J(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n = \sum_{\lambda=1}^{\nu}\int_{(L_\lambda)} f(\Phi(u))J(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

Φ 是从 (L_λ) 到 (K_λ) 上的一一映射, 并且在 (L_λ) 上 $J(u) > 0$. 因此根据 (8.69) 式,

$$\int_{(K_\lambda)} f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \int_{(L_\lambda)} f(\Phi(u))J(u)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

故 (8.75) 式成立. □

例 8.4 例 7.4 中关于两个变量的仿射变换可以同样推广到 n 个变量的情况. 当 n 个变量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的线性组合

$$\varphi_j(u) = a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2 + \cdots + a_{jn}u_n + b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

的系数 a_{jk} 组成的矩阵 $A = (a_{jk})_{j,k=1,2,\cdots,n}$ 的行列式 $|A|$ 不为 0 时, 称 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一一映射

$$\Phi : (u_1, u_2, \cdots, u_n) \to (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_n(u))$$

为仿射变换. 仿射变换 Φ 的函数行列式为 $J = |A|$. 为方便起见, 假设

$$J = |A| > 0.$$

当 $|A| < 0$ 时, 将 u_1 和 u_2 互换, 则 $|A| > 0$. 设 $K \subset \mathbf{R}^n$ 是具有分段光滑边界的有界闭领域, $f(P)(P = (x_1, x_2, \cdots, x_n))$ 是 K 上的连续函数, 若 $L = \Phi^{-1}(K)$, 则根据换元公式 (8.72),

$$\int_K f(P)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = |A|\int_L f(\Phi(u))\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n.$$

这里, 若令 $f(P) = 1$, 则可得等式

$$\omega(K) = |A|\omega(L), \quad L = \Phi^{-1}(K).$$

例如, 若 $K = \{(x,y,z)|x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1\}$, $\Phi : (u,v,w) \to (x,y,z) = (au, bv, cw)$, 则 $L = \Phi^{-1}(K)$ 是半径为 1 的球: $u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$, 仿射变换 Φ 的函数行列式为 abc, 所以根据例 8.2, $\omega(L) = 4\pi/3$, 因此椭球体 K 的体积为

$$\omega(K) = \frac{4\pi}{3}abc.$$

设仿射变换

$$\Phi : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

是从点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 到点 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in \mathbf{R}^n$ 的变换, 并且用 L' 表示 $\Phi(L)$, 则

$$\omega(L') = |A|\omega(L).$$

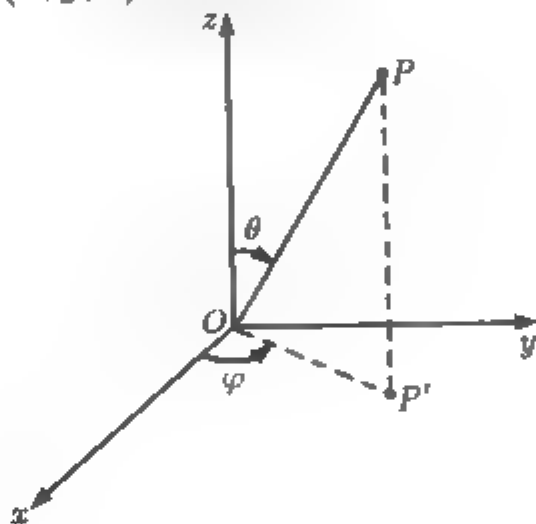
交换矩阵 $A = (a_{jk})$ 的行和列所得的矩阵称为 A 的**转置矩阵**(transposed matrix), 用 ${}^tA$ 表示: ${}^tA = (b_{jk}), b_{jk} = a_{kj}$. 当 ${}^tAA = 1$, 1 是单位矩阵时, A 叫做**正交矩阵**. 当 $\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$, $A = (a_{jk})$ 是正交矩阵时, 仿射变换 Φ 表示以 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的原点 O 为中心的**旋转**. 因为 $|{}^tA| = |A|$ 且 $|A| > 0$, 所以若 ${}^tAA = 1$, 则 $|A| = 1$. 因而, 此时 $\omega(L') = \omega(L)$, 即容积在旋转下不变.

显然, 容积在平移 Φ: $(x_1, \cdots, x_n) \to (x'_1, \cdots, x'_n) = (x_1 + b_1, \cdots, x_n + b_n)$ 下不变.

例 8.5 对于空间 $\mathbf{R}^3$ 内的点 $P = (x,y,z)$, 若连接原点 O 和 P 的线段 OP 的长为 r, OP 与 z 轴正方向的夹角为 θ, OP 在 (x,y) 平面上的射影为 OP', $P' = (x,y,0)$ 与 x 轴正方向的夹角为 φ, 则 P 的坐标 x, y, z 分别可以用

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

表示. 称 (r,θ,φ) 为点 $P = (x,y,z)$ 的**极坐标**.



$$\Phi : (r,\theta,\varphi) \to (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

是从闭领域 $[0,+\infty)\times[0,\pi]\times R = \{(r,\theta,\varphi)\,|\,0 \leqslant r < +\infty, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, -\infty < \varphi < +\infty\}$ 到 $\mathbf{R}^3$ 上的连续可微映射, 并且 Φ 的函数行列式为

$$J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Φ 是从闭领域 $[0,+\infty)\times[0,\pi]\times\mathbf{R}$ 的边界到 $\mathbf{R}^3$ 的 z 轴: $Z=(0,0)\times\mathbf{R}$ 上的映射, 是从开核 $\Omega=(0,+\infty)\times(0,\pi)\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^3$ 中除去 z 轴以外的领域 $\mathbf{R}^3 - Z$ 上的映射. 在 Ω 上恒有

$$J(r,\theta,\varphi) = r^2\sin\theta > 0.$$

所以根据定理 8.3, Φ 是 Ω 的每一个点的充分小的邻域上的一一映射. 在整个 Ω 上 Φ 不是一一映射, 通过 Φ 将无数的点 $(r,\theta,\varphi+2m\pi)$, $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 与同一个点 (x,y,z) 相对应.

假设 $f(x,y,z)$ 是领域 D 上的连续函数且积分 $\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 绝对收敛. 则若存在 $D=\Phi(E)$ 的领域 $E\subset\Omega$, 使得 Φ 在 E 上是一一映射, 那么根据公式 (8.69),

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_E f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

这就是积分变量 x,y,z 变换成 r,θ,φ 的换元公式.

假设 K 是以原点 O 为中心、R 为半径的球: $K=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$, 则有 $K=\Phi(L)$, $L=\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, 但是 Φ 在区间 L 的边界上未必是一一映射. 若 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, 则 $y=r\sin\theta\sin\varphi\geqslant 0$; 若 $\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, 则 $y=r\sin\theta\sin\varphi\leqslant 0$, 所以若 L 被分割成两个区间 $L_1=\{(r,\theta,\varphi)\in L\,|\,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$ 和 $L_2=\{(r,\theta,\varphi)\in L\,|\,\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, 则 K 被分割成两个半球 $K_1=\Phi(L_1)=\{(x,y,z)\in K\,|\,y\geqslant 0\}$ 和 $K_2=\Phi(L_2)=\{(x,y,z)\in K\,|\,y\leqslant 0\}$, 并且 Φ 是从 $(L_1)\subset\Omega$ 到 (K_1) 上、从 $(L_2)\subset\Omega$ 到 (K_2) 上的一一映射. 因此根据定理 8.17, 对于 K 上的连续函数 $f(x,y,z)$, 换元公式

$$\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\Phi(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

成立. 当然右边的 $\Phi(r,\theta,\varphi)$ 表示 $(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. 公式中若令 $f(x,y,z)=1$, 则可自然求得球的体积. 即

$$\omega(K)=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4\pi}{3}R^3.$$

$f(x,y,z)$ 在空间 $\mathbf{R}^3$ 中连续, 并且当 $\int_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 绝对收敛时, 若求此公式当 $R\to+\infty$ 时的极限, 则得

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{+\infty}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\Phi(r,\theta,\varphi))r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

作为一个实例, 试利用极坐标重新计算例 8.3 中的积分 $\int_K \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}}$. 令 $x=r\sin\theta\cos\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\theta, t=-\cos\theta$, 则

$$x^2+y^2+(z-\rho)^2=x^2+y^2+z^2+\rho^2-2z\rho=r^2+\rho^2-2\rho r\cos\theta,$$

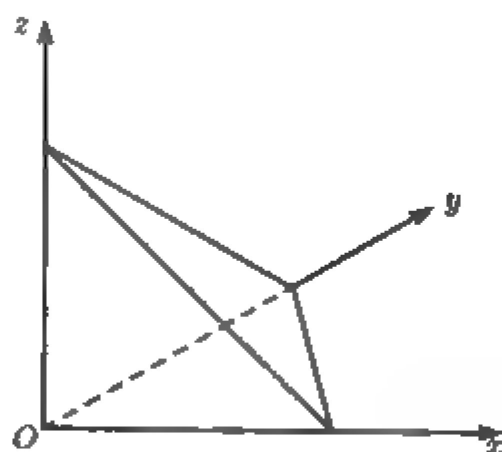
所以

$$\begin{aligned}\int_K \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}} &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\theta}}\\ &=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^\pi\frac{2\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r\cos\theta}}\\ &=2\pi\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{r^2+\rho^2+2\rho rt}}\\ &=2\pi\int_0^R\frac{r}{\rho}(\sqrt{r^2+\rho^2+2\rho r}-\sqrt{r^2+\rho^2-2\rho r})\mathrm{d}r\\ &=2\pi\int_0^R\frac{r}{\rho}(r+\rho-|r-\rho|)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

因此,

$$\int_K \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\rho)^2}}=\begin{cases}2\pi R^2-\dfrac{2\pi}{3}\rho^2, & 0\leqslant\rho<R,\\ \dfrac{4\pi R^3}{3\rho}, & \rho\geqslant R.\end{cases}$$

例 8.6 令 $D=\{(x,y,z)\,|\,x>0,y>0,z>0,x+y+z<1\}$. D 的闭包 $[D]$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 内的平面: $x+y+z=1$ 和三个坐标平面: $x=0,y=0,z=0$ 所围成的四面体. 计算函数



$$f(x,y,z)=(1-x-y-z)^{p-1}x^{q-1}y^{r-1}z^{s-1},\quad p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0,$$

在 D 上的积分. 若 $(x,y,z)\in D$, 则 $z<y+z<x+y+z<1$, 所以若

$$u=x+y+z,\quad v=\frac{y+z}{x+y+z},\quad w=\frac{z}{y+z},\tag{8.76}$$

则有 $0<u<1, 0<v<1, 0<w<1$. 并且 x,y,z 表示为

$$x=u(1-v),\quad y=uv(1-w),\quad z=uvw.\tag{8.77}$$

反之, 若 $0<u<1, 0<v<1, 0<w<1$, 则由 (8.77) 式给定的点 (x,y,z) 属于 D. 即

$$\Phi:(u,v,w)\to(x,y,z)=(u(1-v),uv(1-w),uvw)$$

是从开区间 $E=\{(u,v,w)\,|0<u<1,0<v<1,0<w<1\}$ 到 D 上的连续可微的一一映射 (事实上是实解析的映射). Φ 的函数行列式为

$$J(u,v,w)=u^2v.$$

事实上, 等式

$$\frac{\partial(u,uv,uvw)}{\partial(u,v,w)}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\cdot\frac{\partial(u,uv,uvw)}{\partial(x,y,z)}$$

中 $u=x+y+z, uv=y+z, uvw=z$, 所以

$$\frac{\partial(u,uv,uvw)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1,$$

因此

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{\partial(u,uv,uvw)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\v&u&0\\vw&uw&uv\end{vmatrix}=u^2v.$$

因为在 D 上恒有 $f(x,y,z)>0$, 所以根据换元公式 (8.68) 式,

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_E f(u(1-v),uv(1-w),uvw)u^2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

因为引理 7.7 对于三重积分也同样成立, 所以右边的积分可以写成

$$\begin{aligned}&\int_E(1-u)^{p-1}u^{q+r+s-1}(1-v)^{q-1}v^{r+s-1}(1-w)^{r-1}w^{s-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\=&\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{q+r+s-1}\mathrm{d}u\int_0^1(1-v)^{q-1}v^{r+s-1}\mathrm{d}v\int_0^1(1-w)^{r-1}w^{s-1}\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

根据例 7.7,

$$\int_0^1(1-u)^{p-1}u^{q-1}\mathrm{d}u=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,\quad q>0,\tag{8.78}$$

因此

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r+s)}{\Gamma(p+q+r+s)}\cdot\frac{\Gamma(q)\Gamma(r+s)}{\Gamma(q+r+s)}\cdot\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)},$$

即

$$\int_D(1-x-y-z)^{p-1}x^{q-1}y^{r-1}z^{s-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}.\tag{8.79}$$

这结果可以推广到 n 个变量的情况. 即若

$$D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0,x_1+x_2+\cdots+x_n<1\},$$

则当 $p>0,q_1>0,q_2>0,\cdots,q_n>0$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\int_D(1-x_1-x_2-\cdots-x_n)^{p-1}x_1^{q_1-1}x_2^{q_2-1}\cdots x_n^{q_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\=&\frac{\Gamma(p)\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)\cdots\Gamma(q_n)}{\Gamma(p+q_1+q_2+\cdots+q_n)}.\end{aligned}\tag{8.80}$$

利用公式 (8.80) 计算 $\mathbf{R}^n$ 内的半径为 R 的球 $K=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|{\xi_1}^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant R^2\}$ 的容积 $\omega(K)$. 对于每一个 $k=1,2,\cdots,n$, 根据 $\xi_k\geqslant0$ 或者 $\xi_k\leqslant0$, K 被分割成容积相同的 2^n 个闭领域. 对于每个 k, 由满足 $\xi_k\geqslant0$ 的点 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 组成的 K 的闭子领域的开核显然为

$$\Delta=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)|\xi_1>0,\cdots,\xi_n>0,\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2<R^2\}.$$

令 $x_k=\xi_k^2/R^2,k=1,2,\cdots,n$, 则

$$\Phi:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\to(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(R\sqrt{x_1},R\sqrt{x_2},\cdots,R\sqrt{x_n})$$

是从 (8.80) 式的领域 D 到 Δ 上的一一的连续可微映射, 其函数行列式为

$$J(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{R^n}{2^n\sqrt{x_1x_2\cdots x_n}}.$$

所以根据 (8.73) 式,

$$\omega(\Delta) = \int_\Delta \mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n = \frac{R^n}{2^n}\int_D x_1^{-1/2}x_2^{-1/2}\cdots x_n^{-1/2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

又因为 $\Gamma(1) = 1$, 所以根据 (8.80) 式,

$$\omega(K) = 2^n\omega(\Delta) = R^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n \Big/ \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right).$$

为求 $\Gamma(1/2)$ 的值, 令 (8.78) 式中 $p = q = 1/2$, 则可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

令 $u = (1-\cos\theta)/2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, 并且将积分变量 u 换成 θ, 则 $u(1-u) = \sin^2\theta/4$, 所以, $\Gamma(1/2)^2 = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi$. 因此有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{8.81}$$

当 n 是偶数: $n = 2m$ 时, 根据 (4.52) 式,

$$\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) = \Gamma(1+m) = m!.$$

当 n 是奇数: $n = 2m+1$ 时, 根据 (4.51) 式,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) &= \Gamma\left(1+m+\frac{1}{2}\right) = \left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{2m+1}{2}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{2m+1}{2}\cdot\frac{2m-1}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1}m!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

因为 $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, 所以半径为 R 的球 K 的容积 $\omega(K)$ 在当 n 为偶数时,

$$\omega(K) = \frac{\pi^m}{m!}R^n, \quad n = 2m,$$

当 n 为奇数时,

$$\omega(K) = \frac{2^{2m+1}m!\pi^m}{(2m+1)!}R^n, \quad n = 2m+1.$$

习 题

57. 求领域 $D = \left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} < 1, x>0, y>0, z>0\right.\right\}$ $(a>0, b>0, c>0)$ 上的积分

$$\int_D \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

的值 (用换元法: $x^2=a^2u(1-v), y^2=b^2uv(1-w), z^2=c^2uvw$).

58. 求闭领域 $K = \{(x,y,z)\,|\,x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} \leqslant 1\}$ 的体积 (可根据换元法, 归结于 (8.79) 式的积分).

59. 证明领域 $D = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2>1\}$ 上的积分

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^s}$$

当 $s>3/2$ 时收敛; 当 $s \leqslant 3/2$ 时发散.

60. 若 $D = \{(x,y,z)\,|\,x>0, y>0, z>0, a<x+y+z<b\}, 0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f(u)$ 是定义在开区间 (a,b) 上的关于 u 的连续函数, 并且恒有 $f(u)>0$. 证明: 当 $q>0, r>0, s>0$ 时,

$$\int_D f(x+y+z)x^{q-1}y^{r-1}z^{s-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(q+r+s)}\int_a^b f(u)u^{q+r+s-1}\mathrm{d}u.$$

(利用 (8.77) 式的换元法.)

61. 设 $D = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1>0, x_2>0,\cdots,x_n>0, a<x_1+x_2+\cdots+x_n<b\}$, $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $f(u)$ 是定义在开区间 (a,b) 上的关于 u 的连续函数, 并且恒有 $f(u)>0$. 证明: 若 $q_1>0, q_2>0,\cdots,q_n>0$, 则等式

$$\int_D f(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_1^{q_1-1}x_2^{q_2-1}\cdots x_n^{q_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)\cdots\Gamma(q_n)}{\Gamma(q_1+q_2+\cdots+q_n)}\int_a^b f(u)u^{q_1+q_2+\cdots+q_n-1}\mathrm{d}u$$

成立 (藤原松三郎《微分積分學 II》, p.261).

62. 证明: 领域 $D = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1{}^2+x_2^2+\cdots+x_n^2>1\}$ 上的积分

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^s}$$

当 $s>n/2$ 时收敛, 当 $s \leqslant n/2$ 时发散, 并且求 $s>n/2$ 时积分的值.

第 9 章　曲线和曲面

9.1　曲　　线

a) 曲线的定义

我们在 7.2 节 c) 中已经介绍过, 当 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是定义在实直线上的闭区间 $I=[a,b]$ 上的连续函数时, 称平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点 $P(t)=(\varphi(t),\psi(t)), a\leqslant t\leqslant b$ 的集合 $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 为曲线. 同理, 当 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是定义在 $I=[a,b]$ 上的连续函数时, 称 $\mathbf{R}^n$ 内的点集

$$C=\{P(t)|P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)),a\leqslant t\leqslant b\} \tag{9.1}$$

为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的曲线. 并且称 (9.1) 式右侧为曲线 C 的参数表示, 称 t 为参数. 每点 $t\in I$ 与点 $P(t)\in\mathbf{R}^n$ 所对应的映射

$$\gamma: t\to\gamma(t)=P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))$$

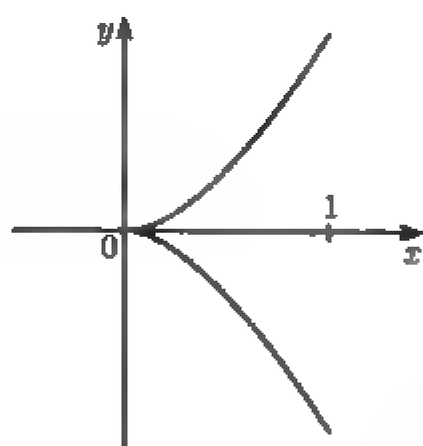
是从闭区间 $I=[a,b]$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续映射, 曲线 C 是 I 在 γ 下的像: $C=\gamma(I)$. 当 γ 是一一映射时, 即若 $a\leqslant t<u\leqslant b$, 则 $P(t)\neq P(u)$ 时, 称 $C=\gamma(I)$ 为 **Jordan 曲线**. 当 $P(a)=P(b)$ 时, 称 C 为**闭曲线**. 当 $P(a)=P(b)$ 且若 $a\leqslant t<u<b$, 则 $P(t)\neq P(u)$ 时, 称 $C=\gamma(I)$ 为 **Jordan 闭曲线**. 例如圆周 $C=\{(\cos t,\sin t)\,|0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$ 是 Jordan 闭曲线. 特别地, 当有必要指出 C 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的曲线时, 称 C 为**平面曲线**. 同理, 称空间 $\mathbf{R}^3$ 内的曲线为**空间曲线**.

当 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是 $I=[a,b]$ 上的连续可微函数时, 称曲线 $C=\{P(t)\ a\leqslant t\leqslant b\},P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 为 $\mathscr{C}^1$**类曲线**. 进一步, 在 $I=[a,b]$ 上若恒有

$$\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2+\cdots+\varphi_n'(t)^2>0, \tag{9.2}$$

则称 C 为**光滑曲线**. (9.2) 式显然蕴含着对于每一个 t, $a\leqslant t\leqslant b$, 微分系数 $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t),\cdots,\varphi_n'(t)$ 至少有一个不为 0. 对于光滑平面曲线, 我们已经在前面讨论. $\mathscr{C}^1$ 类曲线未必是 "光滑的", 例如, 这可以从下图的平面曲线 $C=\{(t^2,t^3)\,|-1\leqslant t\leqslant 1\}$ 易知.

当 C 是闭曲线时, 若 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 连续可微且当 $\varphi_1'(a)=\varphi_1'(b),\varphi_2'(a)=\varphi_2'(b),\cdots,\varphi_n'(a)=\varphi_n'(b)$ 时, 称 C 为 $\mathscr{C}^1$**类闭曲线**. 进一步, 若恒有 $\varphi_1'(t)^2+\cdots+\varphi_n'(t)^2>0$, 则称 C 为**光滑闭曲线**.



当 C 光滑时, 对于 C 上两点 $P(c)=(\varphi_1(c),\cdots,\varphi_n(c)), P(u)=(\varphi_1(u),\cdots,\varphi_n(u))$, 若令

$$h_\nu(t)=(1-t)\varphi_\nu(c)+t\varphi_\nu(u),\quad \nu=1,2,\cdots,n,$$

则连结两点 $P(c)$ 和 $P(u)$ 的直线可以用参数表示为

$$\{(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))|-\infty<t<+\infty\}.$$

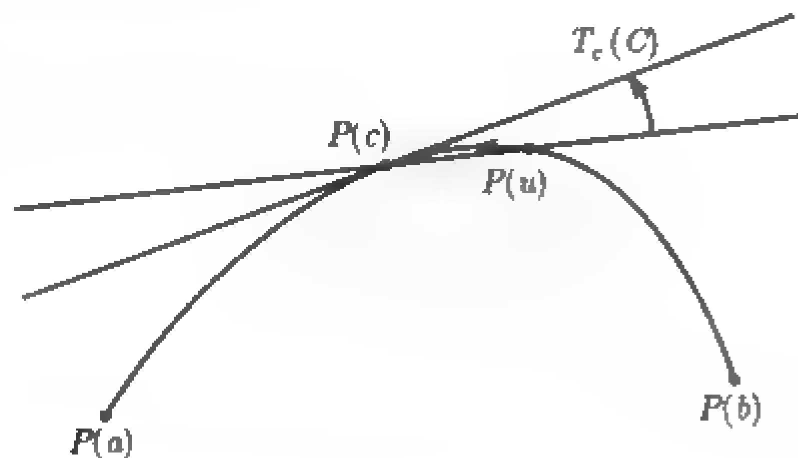
根据中值定理,

$$h_\nu(t)=\varphi_\nu(c)+\varphi'_\nu(c+\theta_\nu(u-c))t,\quad 0<\theta_\nu<1,$$

所以, 连结两点 $P(c)$ 和 $P(u)$ 的直线在 $u\to c$ 时的 "极限" 位置为

$$\{(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))|h_\nu(t)=\varphi_\nu(c)+\varphi'_\nu(c)t,-\infty<t<+\infty\}.$$

若 $t\neq c$, 则当 $P(t)\neq P(c)$ 时, 称这条直线为 C 上点 $P(c)$ 处的切线. 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 是连续可微的函数时, $f(x)$ 的图像, 即为简单曲线 $C=\{(x,f(x))|a\leqslant x\leqslant b\}$ 的切线, 这已经在前文介绍.



在曲线中存在不像 "曲线" 的极其复杂的曲线. 例如, 曲线 C 通过三角形 $\Delta=\{(x,y)|x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$ 上的所有点, 即 $C=\Delta$ 的曲线存在[①]. 此曲线 $C=\Delta$

① 参考高木貞治《解析概論》附录 II.

称为 **Peano 曲线**. Peano 曲线虽不是 Jordan 曲线[1], 但是在 Jordan 曲线中也存在复杂的曲线. 例如, 平面上的 Jordan 曲线中存在其面积不为 0 的曲线[2]. 光滑的 Jordan 曲线简单明了.

与平面曲线的情况相同, 对于 $\mathbf{R}^n$ 内的曲线, 它存在无数种参数表示. 若 $\lambda(\tau)$ 是定义在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的关于 τ 的单调递增连续函数, 并且 $\lambda(\alpha)=a, \lambda(\beta)=b$, 则由曲线 C 的参数表示: $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 经变量变换 $t=\lambda(\tau)$ 可获得新的参数表示: $C=\{Q(\tau)\,|\alpha\leqslant\tau\leqslant\beta\}, Q(\tau)=P(\lambda(\tau))$. 参数对应 $\tau\to t=\lambda(\tau)$ 是一一映射. 所以当 C 是 Jordan 曲线时, *"Jordan 曲线" 这一性质不会在变量变换中改变. 同理, "Jordan 闭曲线" 这一性质也不会在变量变换中改变.*

在 $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 的参数变换 $t=\lambda(\tau)$ 中, 若 C 是 $\mathscr{C}^1$ 类曲线, 设 $\lambda(\tau)$ 是关于 τ 的连续可微的单调递增函数, 若 C 是光滑, 设 $\lambda(\tau)$ 是连续可微且恒有 $\lambda'(\tau)>0$. 将 $t=\lambda(\tau)$ 代入 $P(t)=(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 中, 则

$$Q(\tau)=P(\lambda(\tau))=(\psi_1(\tau),\cdots,\psi_n(\tau)),\quad \psi_\nu(\tau)=\varphi_\nu(\lambda(\tau)),\quad \nu=1,2,\cdots,n,$$

所以当 C 是 $\mathscr{C}^1$ 类时, $\psi_1(\tau),\cdots,\psi_n(\tau)$ 是连续可微的函数, 并且当 C 是光滑时,

$$\psi_1'(\tau)^2+\cdots+\psi_n'(\tau)^2=(\varphi_1'(t)^2+\cdots+\varphi_n'(t)^2)\lambda'(\tau)^2>0.$$

因此, *"$\mathscr{C}^1$ 类曲线", "光滑曲线" 等性质不随参数的变换而变化.*

b) 曲线的长度

用 $|PQ|$ 表示 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内两点 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离:

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

$|PQ|$ 显然是连接 P 和 Q 的线段 PQ 的长度. 在 2.4 节 b) 中定义了圆弧的长度为其内接折线长度的上确界, $\mathbf{R}^n$ 内的 Jordan 曲线的长度也同样定义.

定义 9.1 设 $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 内的 Jordan 曲线, 对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 $\Delta=\{t_0,t_1,t_2,\cdots,t_m\}, a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=b$, 对于 C 上的点 $P(t_0),P(t_1),P(t_2),\cdots,P(t_m)$, 顺次连结相邻点所得的折线 L_Δ 的长度设为

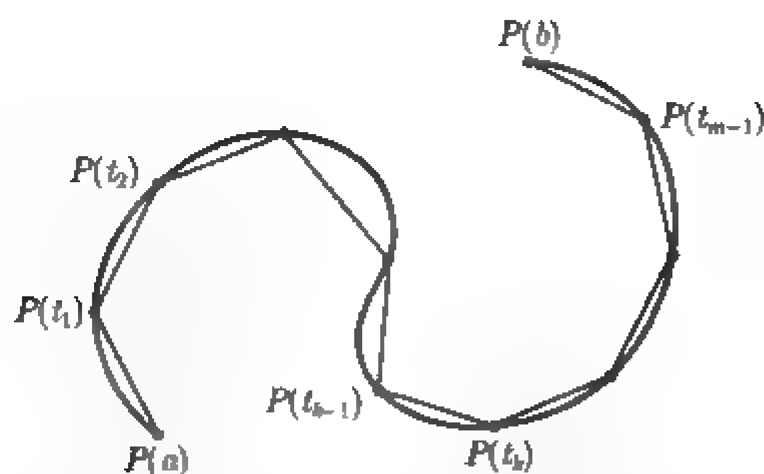
$$l_\Delta=\sum_{k=1}^{m}|P(t_{k-1})P(t_k)|.$$

对于区间 $[a,b]$ 所得的分割 Δ, 当 l_Δ 有界时, 称 Jordan 曲线 C 具有长度, 称 l_Δ 的上确界为 C 的长度. C 的长度用 $l(C)$ 表示:

$$l(C)=\sup_{\Delta} l_\Delta. \tag{9.3}$$

① 根据拓扑学, 不存在从区间 I 到三角形 Δ 上的一一的连续映射.

② 参考高木貞治《解析概論》附录 II



定理 9.1 $\mathscr{C}^1$ 类的 Jordan 曲线 $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$, $P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))$ 具有长度. 其长度为

$$l(C)=\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2+\cdots+\varphi_n'(t)^2}\mathrm{d}t. \tag{9.4}$$

证明 为了方便起见, 证明 n=2 时的情况. 其证明方法对一般情况也同样适用. 对于分割 $\Delta=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\}$, 令 $\delta[\Delta]=\max\limits_k(t_k-t_{k-1})$. 在

$$|P(t_k)P(t_{k-1})|=\sqrt{(\varphi_1(t_k)-\varphi_1(t_{k-1}))^2+(\varphi_2(t_k)-\varphi_2(t_{k-1}))^2}$$

中, 根据中值定理,

$$\varphi_1(t_k)-\varphi_1(t_{k-1})=\varphi_1'(\tau_{k1})(t_k-t_{k-1}),\quad t_{k-1}<\tau_{k1}<t_k,$$

$$\varphi_2(t_k)-\varphi_2(t_{k-1})=\varphi_2'(\tau_{k2})(t_k-t_{k-1}),\quad t_{k-1}<\tau_{k2}<t_k,$$

所以

$$l_\Delta=\sum_{k=1}^m|P(t_{k-1})P(t_k)|=\sum_{k=1}^m\sqrt{\varphi_1'(\tau_{k1})^2+\varphi_2'(\tau_{k2})^2}(t_k-t_{k-1}). \tag{9.5}$$

由此结果, 显然有

$$\lim_{\delta[\Delta]\to0}l_\Delta=\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

为了谨慎起见, 现阐述其证明过程.

根据定理 2.3, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $\varphi_1'(t)$ 和 $\varphi_2'(t)$ 一致连续. 即对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得

$$\text{当 } |t-s|<\delta(\varepsilon) \text{ 时,}\quad |\varphi_1'(t)-\varphi_1'(s)|<\varepsilon,\quad |\varphi_2'(t)-\varphi_2'(s)|<\varepsilon$$

成立. 若 $\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon)$, 则当 $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$ 时, $|\tau_{k1}-t|<\delta(\varepsilon),|\tau_{k2}-t|<\delta(\varepsilon)$. 所以

$$|\varphi_1'(\tau_{k1})-\varphi_1'(t)|<\varepsilon,\quad |\varphi_2'(\tau_{k2})-\varphi_2'(t)|<\varepsilon,$$

因此, 根据不等式

$$\left|\sqrt{\xi^2+\eta^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right| \leqslant \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \leqslant |x-\xi|+|y-\eta|$$

得

$$\left|\sqrt{\varphi_1'(\tau_{k1})^2+\varphi_2'(\tau_{k2})^2}-\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\right| < 2\varepsilon.$$

故, 根据 (9.5) 式,

$$l_\Delta=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{\varphi_1'(\tau_{k1})^2+\varphi_2'(\tau_{k2})^2}\mathrm{d}t,$$

从而

$$\begin{aligned}&l_\Delta-\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t\\=&\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\sqrt{\varphi_1'(\tau_{k1})^2+\varphi_2'(\tau_{k2})^2}-\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

所以

$$\left|l_\Delta-\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon(b-a). \tag{9.6}$$

因此

$$\lim_{\delta[\Delta]\to 0} l_\Delta=\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t. \tag{9.7}$$

若 $\Delta\subset\Delta'$, 则 $l_\Delta\leqslant l_{\Delta'}$, 所以即使将分割 Δ 限制到 $\delta[\Delta]<\delta(\varepsilon)$, $\sup\limits_{\Delta} l_\Delta$ 也不变. 所以根据 (9.6) 式,

$$\left|\sup_{\Delta} l_\Delta-\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\varepsilon(b-a).$$

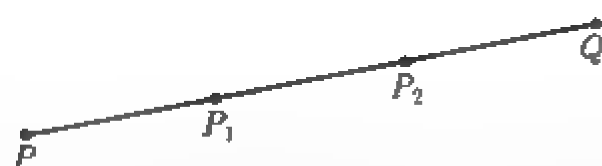
又因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以有

$$l(C)=\sup_{\Delta} l_\Delta=\int_a^b\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

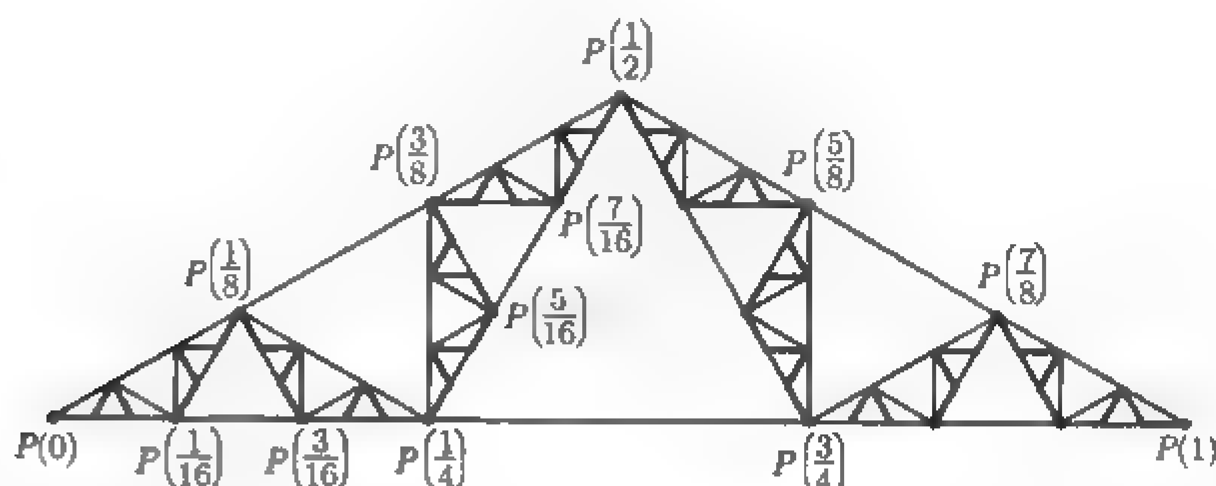
一般的 Jordan 曲线未必具有长度. □

例 9.1　举一个不具有长度的 Jordan 曲线的例子. 当线段 PQ 上的点 P_1 和 P_2 将 PQ 三等分时, 称 P_1 和 P_2 为线段 PQ 的三等分点. 约定三等分点 P_1 和 P_2 的位置是 P_1 位于 P 和 P_2 之间.

为了定义不具有长度的平面上的 Jordan 曲线 $C=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant 1\}$, 首先对于 $t=0,1,1/2,1/4,3/4,1/8,3/8,5/8,\cdots$, 将 $P(t)$ 顺次定义为: $P(0)=(-3,0)$, $P(1)=$



(3,0), $P(1/2)=(0,\sqrt{3})$. 其次, 令 $P(1/4)$ 和 $P(3/4)$ 为线段 $P(0)P(1)$ 的三等分点; $P(1/8)$ 和 $P(3/8)$ 为线段 $P(0)P(1/2)$ 的三等分点; $P(5/8)$ 和 $P(7/8)$ 为线段 $P(1/2)P(1)$ 的三等分点; $P(1/16)$ 和 $P(3/16)$ 为线段 $P(0)P(1/4)$ 的三等分点; $P(5/16)$ 和 $P(7/16)$ 为线段 $P(1/4)P(1/2)$ 的三等分点; $\cdots$. 一般地, 对于自然数 n 和 k, $k\leqslant 2^{n-1}$, 定义 $P((4k-3)/2^{n+1})$ 和 $P\left((4k-1)/2^{n+1}\right)$ 为线段 $P\left((k-1)/2^{n-1}\right)P\left(k/2^{n-1}\right)$ 的三等分点.



这样对于形如 $r=k/2^n$ (n 和 k 为自然数, $k\leqslant 2^n$) 的所有有理数 r, 可以确定平面上的点 $P(r)$. 对于形如 $r=k/2^n$ 的非有理数的实数 t, $0<t<1$, 将 t 展开为二进制小数:

$$t=0.\,h_1h_2h_3\cdots h_n\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{2^n},\quad \text{每个 } h_n \text{ 或者为 0 或者为 1},$$

并且令

$$P(t)=\lim_{n\to\infty}P(t_n),\quad t_n=0.\,h_1h_2h_3\cdots h_n,$$

则 $C=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是一个 Jordan 曲线[①].

对于区间 $I=[0,1]$ 的分割 $\Delta_n=\{0,1/2^n,2/2^n,3/2^n,\cdots,1\}$, 将此 Jordan 曲线 C 上的点 $P(0),P(1/2^n),P(2/2^n),\cdots,P(1)$ 顺次用线段连接所得的折线设为 L_{Δ_n} (上图粗线表示 L_{Δ_6}), 则

$$\left|P(0)P\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|P\left(\frac{1}{2}\right)P(1)\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}|P(0)P(1)|,$$

① $C=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是 Jordan 曲线的证明, 参考高木貞治《解析概論》附录 II.

所以 L_{Δ_n} 的长度为

$$l_{\Delta_n} = 6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n,$$

因此, 当 $n \to \infty$ 时 $l_{\Delta_n} \to +\infty$. 从而, 此 Jordan 曲线 C 不具有长度.

因此, 上述 Peano 曲线也可同样定义. 即首先设 $P(0) = (0,1), P(1) = (1,0), P(1/2) = (0,0)$. 其次, 定义 $P(1/4) = P(3/4)$ 是线段 $P(0)P(1)$ 的中点, $P(1/8) = P(3/8)$ 是线段 $P(0)P(1/2)$ 的中点, $P(5/8) = P(7/8)$ 是线段 $P(1/2)P(1)$ 的中点, 一般地, 对于自然数 n 和 k, $k \leqslant 2^{n-1}$, 定义 $P\left((4k-3)/2^{n+1}\right) = P\left((4k-1)/2^{n+1}\right)$ 是线段 $P\left((k-1)/2^{n-1}\right)P\left(k/2^{n-1}\right)$ 的中点. 并且对于实数 $t \neq k/2^n$, 将 t 展开成二进制小数 $t = 0.h_1h_2\cdots h_n\cdots$, 令

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} P(0.h_1h_2\cdots h_n),$$

则 $C = \{P(t)\,|0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 是 Peano 曲线①.

在 Jordan 曲线 $C = \{P(t)\,|a \leqslant t \leqslant b\}$ 的长度的定义中, **参数 t 仅与决定点列 $P(t_0), P(t_1), P(t_2), \cdots, P(t_m)$ 的顺序有关. 因此在参数变换 $t = \lambda(\tau)$ ($\lambda(\tau)$ 是 τ 的单调递增连续函数) 下, C 的长度 $l(C)$ 不变.** 在 C 是 $\mathscr{C}^1$ 类的条件下, 这可由公式 (9.4) 导出. 即为了方便起见, 若令 $n=2$, 则当 $\psi_1(\tau) = \varphi_1(t)$, $\psi_2(\tau) = \varphi_2(t), t = \lambda(\tau)$ 时, 根据换元积分公式 (4.56) 式,

$$\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi_1'(\lambda(\tau))^2 + \varphi_2'(\lambda(\tau))^2}\lambda'(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

又因为 $\lambda(\tau)$ 连续可微且单调递增, 所以 $\lambda'(\tau) \geqslant 0$(定理 3.8), 并且 $\psi_1'(\tau) = \varphi_1'(\lambda(\tau))\lambda'(\tau), \psi_2'(\tau) = \varphi_2'(\lambda(\tau))\lambda'(\tau)$. 因此

$$\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\psi_1'(\tau)^2 + \psi_2'(\tau)^2}\mathrm{d}\tau.$$

从而, $l(C)$ 不随参数 $t = \lambda(\tau)$ 的变换而变化.

若 $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \cdots, x_n = \varphi_n(t)$, 则公式 (9.4) 可写为

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

对于 $\mathscr{C}^1$ 类 Jordan 曲线 $C = \{P(t)|a \leqslant t \leqslant b\}$, $P(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$, 令

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\mathrm{d}t. \tag{9.8}$$

① 参考高木貞治《解析概論》附录 II.

效仿圆弧, 若将曲线 C 的点 $P(a)$ 到 $P(t)$ 的部分: $C^t = \{P(u)|a \leqslant u \leqslant t\}$ 称为 C 的弧[①], 则 $s(t)$ 是弧 C^t 的长度. $s(t)$ 是 $t(a \leqslant t \leqslant b)$ 的连续可微单调递增函数. 当 $u < t$ 时, $s(t) - s(u) \geqslant |P(u)P(t)| > 0$, 由此显然 $s(t)$ 是单调递增的. 因为 $s(a) = 0, s(b) = l$, 若将 $s = s(t)$ 的反函数设为 $t = \lambda(s)$, 则 $\lambda(s)$ 是定义在闭区间 $[0, l]$ $(l = l(C))$ 上的单调递增连续函数 (定理 2.7). 因此, 曲线 C 的参数 t 用 s 替换, 表示为 $C = \{Q(s)|0 \leqslant s \leqslant l\}, Q(s) = P(\lambda(s))$. 此时, 即使 C 是 $\mathscr{C}^1$ 类, $\lambda(s)$ 也未必关于 s 连续可微, 但是若 C 是光滑的, 则

$$s'(t) = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2} > 0, \tag{9.9}$$

所以$\lambda(s)$ 关于 s 连续可微, 并且

$$\lambda'(s) = \frac{1}{s'(t)} > 0, \quad t = \lambda(s). \tag{9.10}$$

因此, 此时若令 $Q(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s))$, 则 $\psi_\nu(s) = \varphi_\nu(\lambda(s))$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 是关于 s 的连续可微函数. 因为 $\psi_\nu'(s) = \varphi_\nu'(t)\lambda'(s), t = \lambda(s)$, 所以根据 (9.9) 式和 (9.10) 式,

$$\psi_1'(s)^2 + \psi_2'(s)^2 + \cdots + \psi_n'(s)^2 = 1.$$

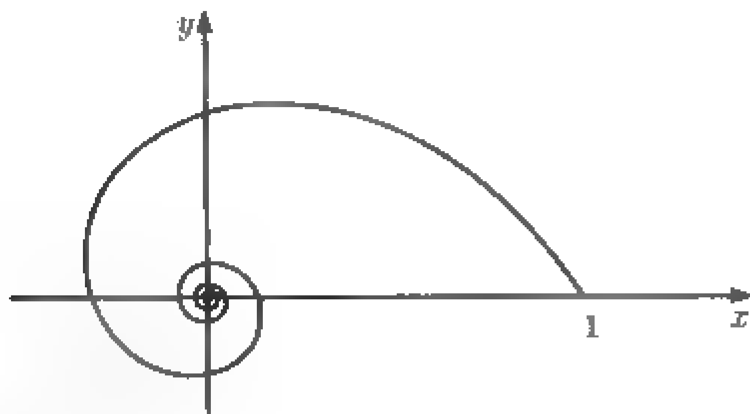
因此, 若取弧长 $s = s(t)$ 为参数, 则公式 (9.4) 可归为恒等式

$$l = l(C) = \int_0^l \mathrm{d}s.$$

例 9.2 当 $P(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)), \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, 0 < t \leqslant 1$ 时, 若令 $\varphi_1(t) = t^3\cos(2\pi/t), \varphi_2(t) = t^3\sin(2\pi/t)$, 则可定义 $\mathscr{C}^1$ 类平面曲线 $C = \{P(t)|0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 下面求曲线 C 的长度. 因为

$$\varphi_1'(t) = 3t^2\cos\frac{2\pi}{t} + 2\pi t\sin\frac{2\pi}{t},$$

$$\varphi_2'(t) = 3t^2\sin\frac{2\pi}{t} - 2\pi t\cos\frac{2\pi}{t},$$



① 高木贞治《解析概論》, p.132.

所以若令 $u=t^2$, 则

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{9t^4+4\pi^2t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^t\sqrt{9t^2+4\pi^2}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{t^2}\sqrt{9u+4\pi^2}\mathrm{d}u.$$

故

$$s(t)=\left(t^2+\frac{4\pi^2}{9}\right)^{3/2}-\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3.$$

因此

$$l(C)=\left(1+\frac{4\pi^2}{9}\right)^{3/2}-\left(\frac{2\pi}{3}\right)^3=3.314\,361\,9\cdots.$$

它是取弧长 $s=s(t)$ 作为参数时, 曲线 C 不是 $\mathscr{C}^1$ 类的例子. 事实上, 若 $\psi_1(s)=\varphi_1(\lambda(s)), t=\lambda(s)$ 是 $s=s(t)$ 的反函数, 因为 $s'(t)=3t\left(t^2+\left(4\pi^2/9\right)\right)^{1/2}$, 所以, 当 $s>0$ 时,

$$\psi_1'(s)=\frac{\varphi_1'(t)}{s'(t)}=\left(t^2+\frac{4\pi^2}{9}\right)^{-1/2}\left(\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{t}+t\cos\frac{2\pi}{t}\right).$$

当 $s\to+0$ 时, $t=\lambda(s)\to+0$, 所以 $\lim\limits_{s\to+0}\psi_1'(s)$ 不存在. 即 $\psi_1(s)$ 在区间 $[0,l]$ 上 $(l=l(C))$ 不是连续可微的.

关于曲线长度的定义 9.1 也同样适用于 Jordan 闭曲线 $\mathscr{C}^1$ 类的 Jordan 闭曲线 C 具有长度, 并且其长度 $l(C)$ 由公式 (9.4) 给出.

例 9.3 求方程 $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ 确定的平面曲线 C 的长度. 因为 $C=\{(x,y)\,|x=\cos^3 t, y=\sin^3 t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$, 所以 C 是 $\mathscr{C}^1$ 类的 Jordan 闭曲线.

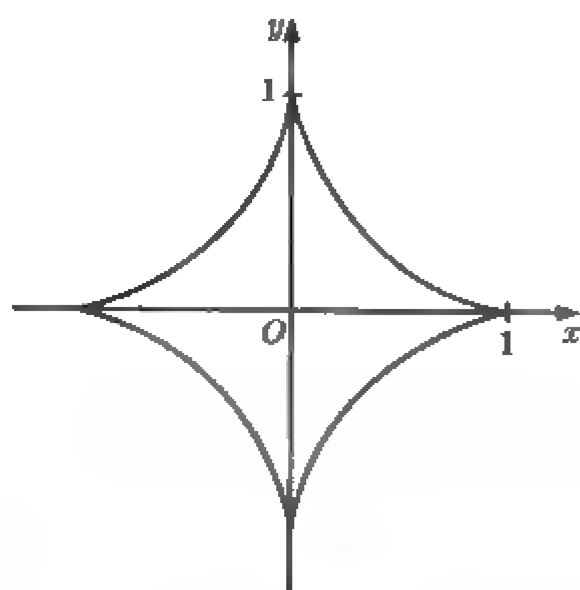
$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t=9\sin^2 t\cos^2 t.$$

因此, C 的长度为

$$l(C)=\int_0^{2\pi}\sqrt{9\sin^2 t\cos^2 t}\mathrm{d}t=3\int_0^{2\pi}|\sin t\cos t|\mathrm{d}t$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}|\sin(2t)|\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\int_0^{4\pi}|\sin u|\mathrm{d}u=3\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u=6.$$

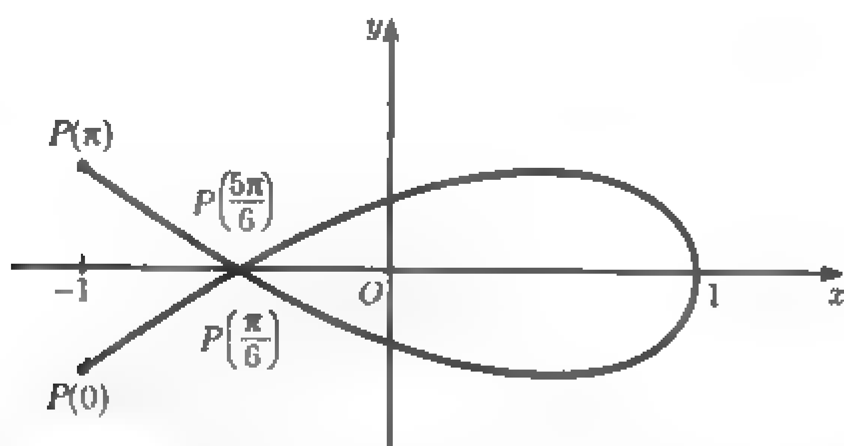
例 9.4 若 $P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t)), \varphi_1(t)=-\cos(2t), \varphi_2(t)=-(1/3)\cos(3t)$, 则参数表示 $C=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant\pi\}$ 是 $\mathscr{C}^1$ 类的平面曲线. 根据简单的计算,

$$\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)=(4\cos^2 t+1)^2\sin^2 t.$$



因此, 根据公式 (9.4), 若令 $u=-\cos t$, 则曲线 C 的长度为

$$l(C)=\int_0^{\pi}(4\cos^2 t+1)\sin t\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(4u^2+1)\mathrm{d}u=\frac{14}{3}.$$



例 9.4 的曲线 C 既不是 Jordan 曲线, 也不是 Jordan 闭曲线, 但是 $P(t)=P(u)$, $0\leqslant t<u\leqslant\pi$, 仅当 $t=\pi/6, u=5\pi/6$ 时才成立. 所以 C 被分成 Jordan 曲线 $C_1=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant\pi/6\}$、Jordan 闭曲线 $C_2=\{P(t)\,|\pi/6\leqslant t\leqslant 5\pi/6\}$ 和 Jordan 曲线 $C_3=\{P(t)\,|5\pi/6\leqslant t\leqslant\pi\}$ 三部分. C_1,C_2,C_3 中的任意两个除点 $(-1/2,0)=P(\pi/6)=P(5\pi/6)$ 外没有任何其他公共点. 因此, C 的长度为 C_1,C_2,C_3 的长度之和. 从而, 由公式 (9.4) 可得.

一般地, 若在 $\mathscr{C}^1$ 类曲线 $C=\{P(t)\,|a\leqslant t\leqslant b\}$ 上, 至多存在有限个满足 $P(t)=P(u)\,(u\neq t)$ 的 $t, a\leqslant t\leqslant b$, 则 C 的长度 $l(C)$ 可由公式 (9.4) 求出.

例如, 若令 $P(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t)), \varphi_1(t)=\cos t, \varphi_2(t)=\sin t$, 则光滑平面曲线 $C=\{P(t)|0\leqslant t\leqslant 3\pi\}$ 是以原点 O 为中心、以 1 为半径的圆周. 公式 (9.4) 的右侧

$$\int_0^{3\pi}\sqrt{\varphi_1'(t)^2+\varphi_2'(t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{3\pi}\mathrm{d}t=3\pi,$$

这与 C 的长度 $l(C)=2\pi$ 不一致. 此时, 为了区别曲线 $C=\{P(t)\,|0\leqslant t\leqslant 3\pi\}$ 和圆

周 $\{P(t)|0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$, 只须说明曲线 C 并不是单纯的点集, 而是连续映射 $\gamma: t \to \gamma(t) = P(t)$ 作用在闭区间 $[0, 3\pi]$上获得的点集即可.

基于以上的思考, 一般地定义曲线如下:

定义 9.2 从实直线上的闭区间 $I = [a, b]$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的连续映射:

$$\gamma: t \to \gamma(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 内的曲线. 当 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 在 I 上连续可微时, 称 γ 为 $\mathscr{C}^1$ 类的曲线. 进一步, 当在 I 上恒有 $\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2 > 0$ 时, 称 γ 为**光滑曲线**.

这就是曲线的现代定义[①]. 对于每一点 $t \in I$, 称 $\gamma(t)$ 为曲线 γ 上的点. 所以称 γ 的值域 $C = \gamma(I)$ 为曲线 γ 上全体点的集合. 例如, 在 $P(t) = (\cos t, \sin t)$ 中, 令

$$\gamma_1: t \to \gamma_1(t) = P(t), \quad t \in I_1 = [0, 3\pi],$$

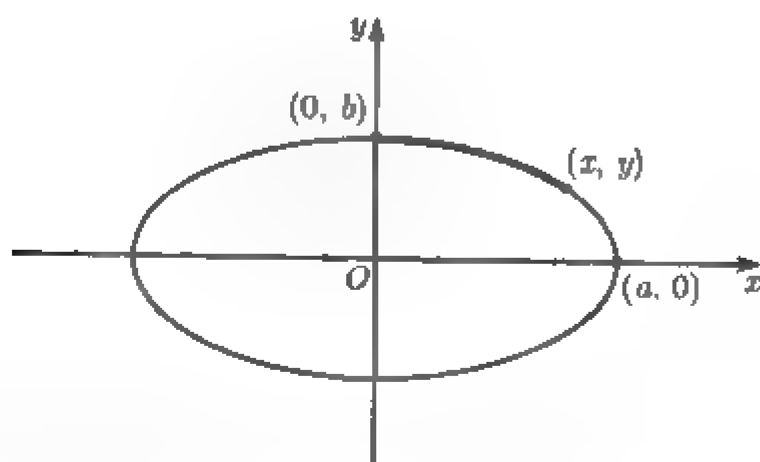
$$\gamma_2: t \to \gamma_2(t) = P(t), \quad t \in I_2 = [0, 2\pi],$$

则 γ_1 和 γ_2 虽是不同的曲线但其上的点集 $\gamma_1(I_1)$ 和 $\gamma_2(I_2)$ 却是相同的圆周 C.

关于曲线长度的定义 9.1 对于此意义下的曲线 γ 也是同样适用. 当 γ 具有长度时, 其长度用 $l(\gamma)$ 表示. $\mathscr{C}^1$ 类曲线 γ 具有长度, 其长度 $l(\gamma)$ 由公式 (9.4) 给出[②].

注 上述例 9.2、例 9.3、例 9.4 中特别选取了以弧长 $s(t)$ 作为 t 的简单函数所表示的曲线. 所以, 可以简单求出曲线的长度. 当然, 通常弧长 $s(t)$ 并不用 t 的简单函数表示. 例如, 椭圆 C: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > b > 0)$ 的 $y > 0$ 的部分, 以 x 作为参数, 表示为

$$\left\{(x, y) | y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, -a < x < a\right\}.$$



① 参考岩波基础数学选书《複素解析》, §1.3, a) 和 §2.1, a).

② 虽然开始就由定义 9.2 定义了曲线, 应用起来会非常简便, 但对初学者来说, 可能会不易接受.

因此, C 上的从点 $(0,b)$ 到 $(x,y)\,(x>0,y>0)$ 的弧长由

$$s(x)=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x,\quad k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$

给出. 上式右边积分称作椭圆积分, 众所周知它并不是 x 的简单函数.

9.2 曲面的面积

本节阐述空间 $\mathbf{R}^3$ 内的光滑曲面的面积. 根据定义 9.1, 可以简单地定义曲线的长度, 但却不能同样简单地定义一般曲面的面积[①]. 从而, 首先取 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $K=\{(x,y)\,|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上的连续可微函数, 并且讨论 $\mathbf{R}^3$ 内的光滑的初等曲面

$$S=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in K\}$$

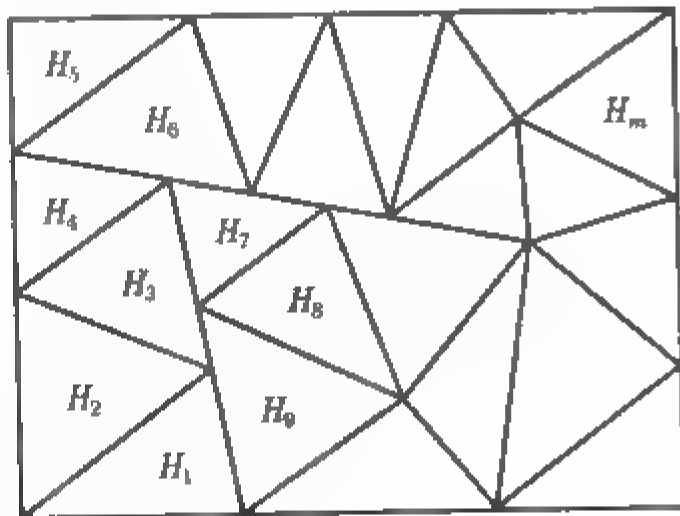
的面积. 从 $\mathbf{R}^3$ 到 (x,y) 平面的正射影用

$$\varpi:(x,y,z)\to(x,y)$$

来表示. ϖ 在 S 上的限制记为 ϖ_S. 则

$$\varpi_S^{-1}(x,y)=(x,y,f(x,y)),\quad (x,y)\in K.$$

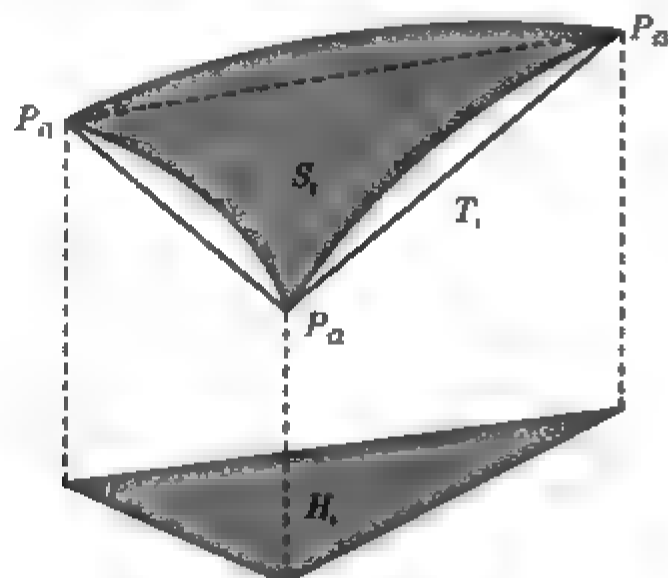
根据 (9.7) 式, 光滑曲线 C 的长度为 C 的内接折线 L_Δ 的长度 l_Δ 在 $\delta[\Delta]\to 0$ 时的极限值. 类似于折线 L_Δ, S 的内接多面体 M_Δ 如下确定: 将矩形 K 分割成有限个小三角形 $H_1,H_2,\cdots,H_\iota,\cdots,H_m$, 并且称其为分割 Δ. 三角形 H_ι 的直径 $\delta(H_\iota)$ 的最大值用 $\delta[\Delta]$ 表示: $\delta[\Delta]=\max\limits_\iota\delta(H_\iota)$. 令 $S_\iota=\varpi_S^{-1}(H_\iota)$, 则曲面 $S=\varpi_S^{-1}(K)$ 被分割为"曲面三角形" $S_1,S_2,\cdots,S_\iota,\cdots,S_m$. 若 H_ι 的顶点为 $(x_{\iota1},y_{\iota1}),(x_{\iota2},y_{\iota2}),(x_{\iota3},y_{\iota3})$, 则 S_ι 的"顶点"为



① 参考《岩波数学辞典第 3 版》pp.896-899.

$$P_{i1}=\overline{\omega}_S^{-1}(x_{i1},y_{i1}),\quad P_{i2}=\overline{\omega}_S^{-1}(x_{i2},y_{i2}),\quad P_{i3}=\overline{\omega}_S^{-1}(x_{i3},y_{i3}).$$

以 P_{i1},P_{i2},P_{i3} 为顶点的"平坦"的三角形 $P_{i1}P_{i2}P_{i3}$ 用 T_i 来表示. 则



$$M_\Delta=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_i\cup\cdots\cup T_m. \tag{9.11}$$

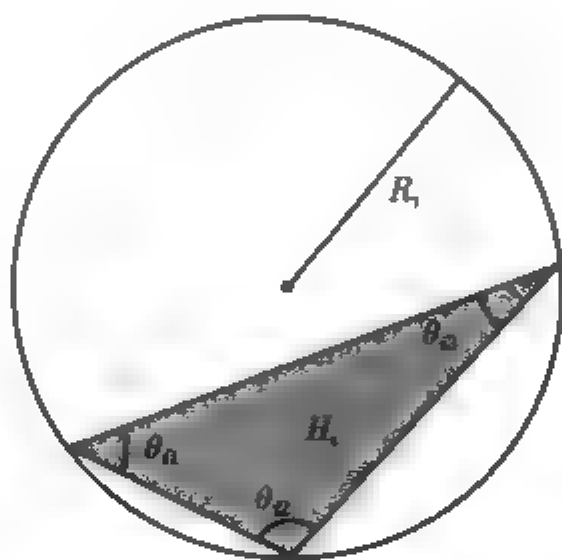
由三角形 T_i 组成的多面体 M_Δ 内接于曲面 S. 若三角形 T_i 的面积为 A_i, 则 M_Δ 的面积为

$$A_\Delta=A_1+A_2+\cdots+A_i+\cdots+A_m.$$

若此面积 A_Δ 的极限 $\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0}A_\Delta$ 存在, 则将此极限定义为 S 的面积, 但若无条件限制, 则 $\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0}A_\Delta$ 不存在. 于是, 取小的正实数 σ_0, 并且将每一个三角形 H_i 的形状如下限制: 当 H_i 的内角为 $\theta_{i1},\theta_{i2},\theta_{i3}$ 时,

$$\sin\theta_{i1}>\sigma_0,\quad \sin\theta_{i2}>\sigma_0,\quad \sin\theta_{i3}>\sigma_0,\quad \sigma_0>0. \tag{9.12}$$

若 $\sigma_0=\sin\theta_0, 0<\theta_0<\pi/2$, 则此条件蕴含内角 $\theta_{i1},\theta_{i2},\theta_{i3}$ 都介于 θ_0 和 $\pi-\theta_0$ 之间.



若三角形 H_i 的外接圆的半径为 R_i, 则 H_i 的面积 $\alpha_i = \omega(H_i)$ 可由公式

$$\alpha_i = 2R_i^2 \sin\theta_{i1} \sin\theta_{i2} \sin\theta_{i3}$$

获得[①]. 所以, 根据条件 (9.12) 式,

$$2R_i^2 < \frac{\alpha_i}{\sigma_0^3}. \tag{9.13}$$

计算三角形 T_i 的面积. 为了简单起见, 将 T_i 的顶点 P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} 中的指标 i 略去, 记为 P_1, P_2, P_3. 若 T_i 的三边的长为 $a = |P_1P_3|$, $b = |P_2P_3|$, $c = |P_1P_2|$, 则根据 Heron 公式[②], T_i 的面积由

$$A_i = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

给出. 通过简单的计算, 得

$$A_i = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2}.$$

设 $P_\kappa = (x_\kappa, y_\kappa, z_\kappa)$, $z_\kappa = f(x_\kappa, y_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3$, 并且令

$$u_\kappa = x_\kappa - x_3, \quad v_\kappa = y_\kappa - y_3, \quad w_\kappa = z_\kappa - z_3, \quad \kappa = 1, 2,$$

则 $a^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2, b^2 = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2, c^2 = (u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2 + (w_1-w_2)^2$, 所以

$$A_i = \frac{1}{2}\sqrt{|u_1v_2 - u_2v_1|^2 + |v_1w_2 - v_2w_1|^2 + |w_1u_2 - w_2u_1|^2}. \tag{9.14}$$

因为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 是三角形 $H_i = \varpi(T_i)$ 的顶点, 所以在公式 (9.14) 中 $|u_1v_2 - u_2v_1|/2$ 与 H_i 的面积相等 (例 7.4):

$$\frac{1}{2}|u_1v_2 - u_2v_1| = \omega(H_i) = \alpha_i. \tag{9.15}$$

由 Taylor 公式 (6.28),

$$w_1 = f(x_1, y_1) - f(x_3, y_3) = f_x(\xi_1, \eta_1)u_1 + f_y(\xi_1, \eta_1)v_1.$$

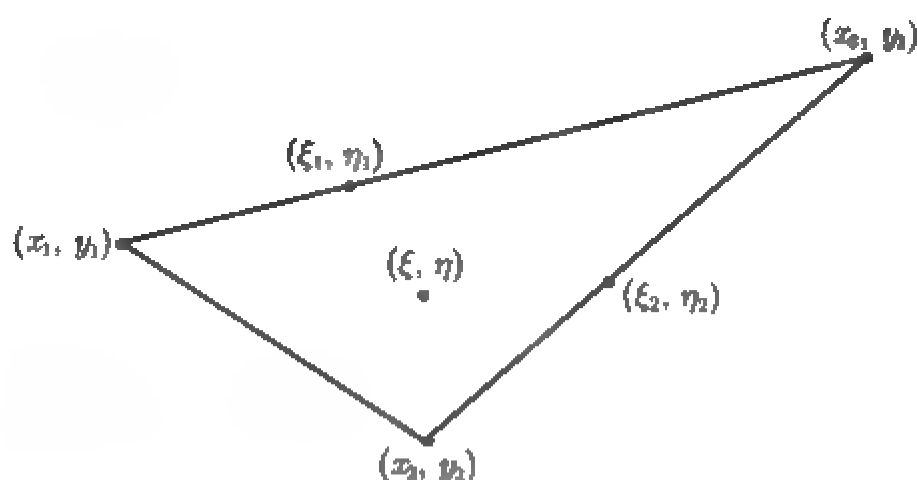
这里 (ξ_1, η_1) 是连结三角形 H_i 的顶点 (x_1, y_1) 和 (x_3, y_3) 的边上的一点. 同理,

$$w_2 = f_x(\xi_2, \eta_2)u_2 + f_y(\xi_2, \eta_2)v_2.$$

连续函数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在矩形 K 上一致连续. 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} < \delta(\varepsilon)$ 时,

$$|f_x(x, y) - f_x(\xi, \eta)| < \varepsilon, \quad |f_y(x, y) - f_y(\xi, \eta)| < \varepsilon.$$

①, ② 参考《岩波数学辞典第 3 版》, p.1 352.



因此, 任意取一点 $(\xi,\eta) \in H_i$, 并且令

$$w_1^* = f_x(\xi,\eta)u_1 + f_y(\xi,\eta)v_1,$$

$$w_2^* = f_x(\xi,\eta)u_2 + f_y(\xi,\eta)v_2,$$

则, 只要 $\delta(H_i) < \delta(\varepsilon)$, 就有

$$|w_1 - w_1^*| \leqslant \varepsilon(|u_1| + |v_1|), \quad |w_2 - w_2^*| \leqslant \varepsilon(|u_2| + |v_2|) \tag{9.16}$$

成立. 所以, 若将 (9.14) 式右边的 w_1 和 w_2 分别换成 w_1^* 和 w_2^*, 则得 A_i 的 "近似值" A_i^*. 因为

$$v_1 w_2^* - v_2 w_1^* = -(u_1 v_2 - u_2 v_1) f_x(\xi,\eta),$$

$$w_1^* u_2 - w_2^* u_1 = -(u_1 v_2 - u_2 v_1) f_y(\xi,\eta),$$

所以

$$A_i^* = \frac{1}{2}|u_1 v_2 - u_2 v_1|\sqrt{1 + f_x(\xi,\eta)^2 + f_y(\xi,\eta)^2}.$$

因此, 根据 (9.15) 式,

$$A_i^* = \sqrt{1 + f_x(\xi,\eta)^2 + f_y(\xi,\eta)^2}\,\omega(H_i).$$

根据中值定理 (定理 7.9), 取点 $(\xi,\eta) \in H_i$, 使得

$$A_i^* = \int_{H_i} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9.17}$$

对于任意实数 α, p, q, r, s, 不等式

$$|\sqrt{\alpha^2 + p^2 + q^2} - \sqrt{\alpha^2 + r^2 + s^2}| \leqslant |p - r| + |q - s| \tag{9.18}$$

成立. 事实上, 若将 $\sqrt{\alpha^2 + p^2 + q^2}$ 和 $\sqrt{\alpha^2 + r^2 + s^2}$ 分别看成是点 (α, p, q) 和 (α, r, s) 到原点 O 的距离, 则根据三角不等式,

$$|\sqrt{\alpha^2 + p^2 + q^2} - \sqrt{\alpha^2 + r^2 + s^2}| \leqslant \sqrt{|p - r|^2 + |q - s|^2}.$$

在不等式 (9.18) 中, 令 $\alpha = u_1v_2 - u_2v_1, p = v_1w_2 - v_2w_1, q = w_1u_2 - w_2u_1$, $r = v_1w_2^* - v_2w_1^*, s = w_1^*u_2 - w_2^*u_1$, 则根据 (9.16) 式,

$$\begin{aligned}&|v_1w_2 - v_2w_1 - v_1w_2^* + v_2w_1^*| + |w_1u_2 - w_2u_1 - w_1^*u_2 + w_2^*u_1|\\ \leqslant &(|u_1| + |v_1|)|w_2 - w_2^*| + (|u_2| + |v_2|)|w_1 - w_1^*|\\ \leqslant &2\varepsilon(|u_1| + |v_1|)(|u_2| + |v_2|),\end{aligned}$$

所以可得不等式

$$|A_i - A_i^*| \leqslant \varepsilon(|u_1| + |v_1|)(|u_2| + |v_2|).$$

又因为 $|u_1| + |v_1| \leqslant \sqrt{2(u_1^2 + v_1^2)}, |u_2| + |v_2| \leqslant \sqrt{2(u_2^2 + v_2^2)}$, 三角形 H_i 的边长 $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ 和 $\sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ 不能超过其外接圆的直径 $2R_i$, 所以

$$|A_i - A_i^*| \leqslant 8\varepsilon R_i^2.$$

因此, 根据 (9.13) 式,

$$|A_i - A_i^*| < \frac{4\varepsilon}{\sigma_0^3}\alpha_i, \quad \alpha_i = \omega(H_i),$$

从而, 根据 (9.17) 式,

$$\left|A_i - \int_{H_i}\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| < \frac{4\varepsilon}{\sigma_0^3}\omega(H_i).$$

若 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$, 则对于 K 的分割 Δ 的每个三角形 $H_i, i = 1, 2, \cdots, m$, 此不等式成立. 所以, $A_\Delta = \sum_{i=1}^{m} A_i, \int_K = \sum_{i=1}^{m}\int_{H_i}, \omega(K) = \sum_{i=1}^{m}\omega(H_i)$, 因此

$$\left|A_\Delta - \int_K\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| < \frac{4\varepsilon}{\sigma_0^3}\omega(K). \tag{9.19}$$

若 $\delta[\Delta] < \delta(\varepsilon)$, 则不等式 (9.19) 成立. 所以, 极限 $\lim_{\delta[\Delta]\to 0} A_\Delta$ 存在且等于 $\int_K\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 从而, 可以将这个积分的值作为曲面 S 的面积.

定义 9.3 光滑的初等曲面 $S = \{(x, y, f(x, y))\,|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 的面积定义为

$$A(S) = \int_a^b\int_c^d\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.20}$$

导出此定义的上述结果可以叙述为如下的定理.

定理 9.2 对于光滑的初等曲面 $S = \{(x, y, f(x, y))\,|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, 分割 Δ 将矩形 $K = \{(x, y)\,|a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ 分割成有限个三角形 $H_1, H_2, \cdots, H_i, \cdots,$

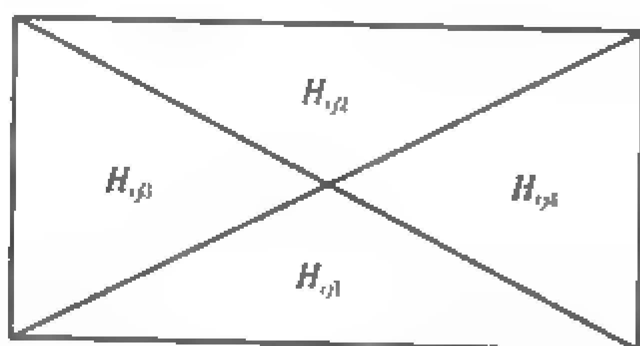
H_m, 通过 (9.11) 式确定 S 的内接多面体 M_Δ, 并且其面积用 A_Δ 表示. 在 (9.12) 式条件下限制分割 Δ 的每个三角形 H_i 的形状. 则当 $\delta[\Delta]\to 0$ 时, A_Δ 的极限等于 S 的面积 $A(S)$: $\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0} A_\Delta = A(S)$.

如前文所述, 在无条件限制下, 一般的 $\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0} A_\Delta$ 不存在.

例 9.5　设 $f(x,y)=x^2$, 讨论曲面 $S=\{(x,y,x^2)\,|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$. 设 m,n 是自然数, $x_i=a+i(b-a)/m, i=0,1,\cdots,m$, $y_j=c+j(d-c)/n, j=0,1,\cdots,n$. 首先, 将矩形 $K=\{(x,y)\,|a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$ 分割成 mn 个小矩形

$$K_{ij}=\{(x,y)|x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,\ y_{j-1}\leqslant y\leqslant y_j\},\quad i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

其次, 若将每个小矩形沿两条对角线如下图分割成 4 个三角形: $H_{ij1}, H_{ij2}, H_{ij3}, H_{ij4}$, 则 K 被分割成 $4mn$ 个三角形 $H_{ij\nu}, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n, \nu=1,2,3,4$, 此分割用 Δ_{mn} 表示. 因为 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\delta[\Delta_{mn}]=0$, 所以若要说明曲面 S 的极限 $\lim\limits_{\delta[\Delta]\to 0} A_\Delta$ 不存在, 只须验证极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} A_{\Delta_{mn}}$ 不存在即可.



若想根据 (9.14) 式求 S 的内接三角形 $T_{ij\nu}, \varpi(T_{ij\nu})=H_{ij\nu}$ 的面积 $A_{ij\nu}$, 可令矩形 K_{ij} 的中心为 (x_i,y_i), $h=(b-a)/2m, k=(d-c)/2n$, 则 T_{ij2} 的顶点 P_1,P_2,P_3 分别为

$$(x_i+h, y_j+k, (x_i+h)^2),\quad (x_i-h, y_j+k, (x_i-h)^2),\quad (x_i, y_i, x_i^2).$$

因此, 关于 A_{ij2} 有

$$u_1=h,\quad v_1=k,\quad w_1=2hx_i+h^2,$$
$$u_2=-h,\quad v_2=k,\quad w_2=-2hx_i+h^2.$$

从而

$$A_{ij2}=hk\sqrt{1+4x_i^2+\frac{h^4}{k^2}}.$$

同理, 得

$$A_{ij3}=hk\sqrt{1+(2x_i-h)^2},\quad A_{ij4}=hk\sqrt{1+(2x_i+h)^2}.$$

又因为 $A_{ij1}=A_{ij2}$, 所以

$$A_{\Delta_{mn}}=hk\sum_i\sum_j\left(2\sqrt{1+4x_i^2+\frac{h^4}{k^2}}+\sqrt{1+(2x_i+h)^2}+\sqrt{1+(2x_i-h)^2}\right).$$

当 $m\to\infty,n\to\infty$ 时, $h=(b-a)/2m\to 0,k=(d-c)/2n\to 0$, 但不能确定 $h^4/k^2=((b-a)^4/4(d-c)^2)\cdot(n^2/m^4)$ 的极限. 若令 $m=nq,q>0$, 再取极限, 则因为 $h^4/k^2\to 0$, 所以

$$\lim A_{\Delta_{mn}}=\lim\sum_i\sum_j\sqrt{1+4x_i^2}\omega(K_{ij})=\int_a^b\int_c^d\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此时, $H_{ij\nu}$ 满足条件 (9.12) 式, 因此, 此极限等于 S 的面积:

$$A(S)=\int_a^b\int_c^d\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若令 $m^2=nq,q>0$, 再取极限, 则因为 $h^4/k^2=r^2,r=(b-a)^2/2(d-c)q$, 所以

$$\lim A_{\Delta_{mn}}=\int_a^b\int_c^d\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2+r^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若令 $m^3=n$, 再取极限, 则因为 $h^4/k^2\to+\infty$, 所以 $\lim A_{\Delta_{mn}}=+\infty$. 因此, 在无条件限制下, 不能确定极限 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}A_{\Delta_{mn}}$[①]

对于任意的光滑的初等曲面 $S=\{(x,y,f(x,y))\,|\,(x,y)\in K\}$, K 是有分段光滑边界的闭领域, $f(x,y)$ 是在某领域 $D\supset K$ 上的连续可微函数, 面积的定义 9.3 也同样适用. 即 S 的面积为

$$A(S)=\int_K\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.21}$$

下面, 根据参数表示 (8.42)

$$S=\{(x,y,z)|x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),(u,v)\in H\}$$

来讨论光滑曲面 S 的面积. 这里, H 是平面上有分段光滑边界的闭区域, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v),\chi(u,v)$ 是某领域 $E\supset H$ 上的连续可微函数, 并且满足 (8.43) 式的条件

$$\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix}^2>0.$$

映射

$$\Psi:(u,v)\to(x,y,z)=\Psi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))$$

① 此例与 Schwarz 的例子类似, 关于 Schwarz 的例子可参考高木貞治的《解析概論》pp. 365-366.

是 H 上的一一映射时, 称 $S=\Psi(H)$ 为光滑的 **Jordan 曲面**[②]. 此时, 因为 Ψ 在 H 的某邻域上是一一映射, 所以从开始就可以假设 Ψ 在领域 $E\supset H$ 上是一一映射.

当光滑的 Jordan 曲面 $S=\Psi(H)$, 作为光滑初等曲面 $S=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in K\}$($K$ 是平面上有分段光滑边界的闭领域, $f(x,y)$ 为某领域 $D\supset K$ 上的连续可微函数) 表示时, S 的面积 $A(S)$ 已由公式 (9.21) 定义. (9.21) 式右边的积分若用 $\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)$ 表示, 则

$$A(S)=\int_H\sqrt{\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix}^2}\,dudv. \tag{9.22}$$

[证明] 设映射: $\Psi:(u,v)\to(x,y,f(x,y))=\Psi(u,v)$ 是 H 上的一一映射, 并且点 $(x,y,f(x,y))$ 由 x,y 唯一确定, 所以映射

$$\Phi=\varpi\circ\Psi:(u,v)\to(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

也在 H 上是一一映射. 因此不妨先设领域 $E\supset H$ 充分小, 则 Φ 在 E 上也是一一映射. 因为 $(x,y,f(x,y))=\Psi(u,v)$, 即 $x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v),f(x,y)=\chi(u,v)$, 所以

$$\chi(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v)),\quad (u,v)\in H. \tag{9.23}$$

在 H 的开核 (H) 上, 对于此等式两边的 u 或者 v 取偏微分, 则可获得等式

$$\chi_u=f_x\cdot\varphi_u+f_y\cdot\psi_u,\quad \chi_v=f_x\cdot\varphi_v+f_y\cdot\psi_v. \tag{9.24}$$

这里, $f_x=f_x(x,y),f_y=f_y(x,y),x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v)$. 因为 (9.24) 式中的两个等式的两边分别是关于 u,v 的连续函数, 所以 (9.24) 式在 H 上成立. 因此, 在 H 上有

$$\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix}^2=(1+f_x^2+f_y^2)\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2. \tag{9.25}$$

根据假设, 此等式的左边恒 >0. 所以在 H 上恒有 $\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}\neq 0$. 从而, 若可预先取领域 $E\supset H$ 充分小, 则在 E 上恒有

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}\neq 0.$$

② 高木貞治《解析概論》p.318.

于是, 根据定理 7.12,

$$\Phi:(u,v)\to(x,y)=(\varphi(x,y),\psi(x,y))$$

是从 E 到 (x,y) 平面上的领域 $\Phi(E)$ 的一一映射. 并且其逆映射

$$\Phi^{-1}:(x,y)\to(u,v)=(u(x,y),v(x,y))$$

在 $\Phi(E)$ 上连续可微且是 (x,y) 坐标系到 (u,v) 坐标系的坐标变换. 显然 $K=\Phi(H)\subset\Phi(E)$. 因此, 利用换元公式 (7.83), 若将 (9.21) 式右边的积分变量 x,y 换成 u,v, 则根据 (9.25) 式,

$$\begin{aligned}A(S)&=\int_K\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_H\sqrt{1+f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))^2+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))^2}\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_H\sqrt{\begin{vmatrix}\varphi_u&\varphi_v\\\psi_u&\psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u&\psi_v\\\chi_u&\chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u&\chi_v\\\varphi_u&\varphi_v\end{vmatrix}^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

(取函数行列式 $\partial(\varphi,\psi)/\partial(u,v)$ 的绝对值的原因, 可参考 7.3 节 (7.86) 式下面的讨论).

定义 9.4 光滑的 Jordan 曲面 $S=\{(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))|(u,v)\in H\}$ 的面积定义为

$$A(S)=\int_H\sqrt{\begin{vmatrix}\varphi_u&\varphi_v\\\psi_u&\psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u&\psi_v\\\chi_u&\chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u&\chi_v\\\varphi_u&\varphi_v\end{vmatrix}^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\tag{9.26}$$

如上所述, 光滑初等曲面 S, 若用 $S=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in K\}$ 表示, 则定义 9.4 与定义 9.3 一致.

设光滑的 Jordan 曲面 $S=\Psi(H)$ 用未必光滑的初等曲面 $S=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in K\}$ 来表示, 其中 K 为闭区域, $f(x,y)$ 是 K 上的连续函数. 此时, 若 $f(x,y)$ 在 K 的开核 (K) 上连续可微, 并且从 H 到 K 上的一一的连续映射 $\Phi=\varpi\circ\Psi:(u,v)\to(x,y)$ 是 (H) 到 (K) 上的映射, 则定义在 (9.26) 式上的 Jordan 曲面 S 的面积 $A(S)$ 可表示为

$$A(S)=\int_{(K)}\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{9.27}$$

[证明] 因为在 (H) 上, 不等式 (9.25) 成立. 所以 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\varphi_u&\varphi_v\\\psi_u&\psi_v\end{vmatrix}\neq0$, 因此根据换元公式 (7.66),

$$\int_{(K)}\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(H)} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_{(H)} \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

因此, (9.27) 式成立. □

公式 (9.27) 在应用上非常有用.

在光滑的 Jordan 曲面 $S = \{\Psi(u,v) \mid (u,v) \in H\}$ 上, H 是矩形时, S 的面积有与定理 9.2 类似的定理成立. 即分割 Δ 将 H 分割成有限个三角形 $H_1, H_2, \cdots, H_i, \cdots, H_m$, 若 $S_i = \Psi(H_i)$, 则 S 被分割成 "曲面三角形" $S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_m$. 若 T_i 和 S_i 具有相同顶点的 "平坦" 三角形, 则其并集

$$M_\Delta = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_i \cup \cdots \cup T_m$$

是 S 的内接多面体. M_Δ 的面积用 A_Δ 表示.

定理 9.3 分割 Δ 的每个三角形 H_i, 若满足条件 (9.12) 式, 则当 $\delta[\Delta] \to 0$ 时, A_Δ 的极限等于 S 的面积 $A(S)$: $\lim_{\delta[\Delta] \to 0} A_\Delta = A(S)$.

此定理的证明方法与定理 9.2 的完全相同.

光滑的 Jordan 曲面 S 的面积 $A(S)$ 不依赖于定义 (9.26) 式中 S 的参数表示中参数的选择方法. [证明] 设

$$S = \{(\lambda(s,t), \mu(s,t), \nu(s,t)) \mid (s,t) \in K\}$$

是曲面的另外一种参数表示, 令 $\Lambda(s,t) = (\lambda(s,t), \mu(s,t), \nu(s,t))$, 则根据 $\Lambda(s,t) = \Psi(u,v)$, 点 $(s,t) \in K$ 与点 $(u,v) \in H$ 是一一映射. 此对应用 Φ 表示:

$$\Phi : (u,v) \to (s,t) = (\sigma(u,v), \tau(u,v)), \quad \Lambda(s,t) = \Psi(u,v).$$

一般地, 因为有界闭集到有界闭集上的一一的连续映射的逆映射是连续的[①], 所以, $\Phi = \Lambda^{-1} \circ \Psi$ 也是连续的. 为了验证 Φ 在 (H) 上连续可微, 任取点 $(u_0, v_0) \in (H)$, 令 $(s_0, t_0) = \Phi(u_0, v_0)$. 点 (s_0, t_0) 上的一个函数行列式, 例如 $\begin{vmatrix} \lambda_s & \lambda_t \\ \mu_s & \mu_t \end{vmatrix}$ 不为 0. $\lambda(s,t), \mu(s,t)$ 是含有 K 的某领域上的连续可微函数, 所以根据定理 7.12, 在 (s_0, t_0) 的邻域 U 上, s, t 是关于 $x = \lambda(s,t), y = \mu(s,t)$ 的连续可微函数, 用 $s = s(x,y), t = t(x,y)$ 表示. $s = s(x,y), t = t(x,y)$ 是 (x,y) 平面上的点 (x_0, y_0) $(x_0 = \lambda(s_0, t_0) = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \mu(s_0, t_0) = \psi(u_0, v_0))$ 的某个邻域上的连续可微函数. 因为 Φ 连续,

① 此处由带有收敛子列的有界点列 (定理 1.30) 那里很容易就导出来.

所以若取 (u_0,v_0) 的充分小的邻域 $W\in(H)$, 则当 $(u,v)\in W$ 时, $(s,t)=\Phi(u,v)$, 即因为 $x=\lambda(s,t)=\varphi(u,v), y=\mu(s,t)=\psi(u,v)$, 所以

$$\sigma(u,v)=s=s(x,y)=s(\varphi(u,v),\psi(u,v)),$$
$$\tau(u,v)=t=t(x,y)=t(\varphi(u,v),\psi(u,v)).$$

因此, $\sigma(u,v),\tau(u,v)$ 在点 $(u_0,v_0)\in(H)$ 的邻域上连续可微. 又因为 (u_0,v_0) 是 (H) 的任意点, 所以 $\sigma(u,v),\tau(u,v)$ 在 (H) 上连续可微. 当 $s=\sigma(u,v), t=\tau(u,v)$ 时, $\lambda(s,t)=\varphi(u,v), \mu(s,t)=\psi(u,v), \nu(s,t)=\chi(u,v)$, 则 $\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda_s & \lambda_t\\ \mu_s & \mu_t\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\sigma_u & \sigma_v\\ \tau_u & \tau_v\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mu_s & \mu_t\\ \nu_s & \nu_t\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\sigma_u & \sigma_v\\ \tau_u & \tau_v\end{vmatrix}$, $\cdots$, 所以

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix}^2\\ =&\left(\begin{vmatrix}\lambda_s & \lambda_t\\ \mu_s & \mu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\mu_s & \mu_t\\ \nu_s & \nu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_s & \nu_t\\ \lambda_s & \lambda_t\end{vmatrix}^2\right)\cdot\begin{vmatrix}\sigma_u & \sigma_v\\ \tau_u & \tau_v\end{vmatrix}^2.\end{aligned}\tag{9.28}$$

根据假设, 此等式左边不为 0. 因此, $\dfrac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\sigma_u & \sigma_v\\ \tau_u & \tau_v\end{vmatrix}$ 不为 0. 从而, 根据定理 7.12, Φ 是从每一点 $(u,v)\in(H)$ 的充分小邻域到 $(s,t)=\Phi(u,v)$ 的一个邻域上的映射. 所以 $\Phi((H))\subset(K)$, 同理 $\Phi^{-1}((K))\subset(H)$. 因此 $\Phi((H))=(K)$, 即 Φ 是 (H) 到 (K) 上的一一的连续可微映射. 并且 Φ 的函数行列式 $\partial(s,t)/\partial(u,v)$ 不为 0. 所以, 根据换元公式 (7.66) 和 (9.28),

$$\begin{aligned}&\int_{(K)}\sqrt{\begin{vmatrix}\lambda_s & \lambda_t\\ \mu_s & \mu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\mu_s & \mu_t\\ \nu_s & \nu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_s & \nu_t\\ \lambda_s & \lambda_t\end{vmatrix}^2}\,dsdt\\ =&\int_{(H)}\sqrt{\begin{vmatrix}\lambda_s & \lambda_t\\ \mu_s & \mu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\mu_s & \mu_t\\ \nu_s & \nu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_s & \nu_t\\ \lambda_s & \lambda_t\end{vmatrix}^2}\left|\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\ =&\int_{(H)}\sqrt{\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix}^2}\,dudv,\end{aligned}$$

即

$$\int_K\sqrt{\begin{vmatrix}\lambda_s & \lambda_t\\ \mu_s & \mu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\mu_s & \mu_t\\ \nu_s & \nu_t\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\nu_s & \nu_t\\ \lambda_s & \lambda_t\end{vmatrix}^2}\,dsdt$$

$$= \int_H \sqrt{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}^2} dudv. \qquad \square$$

当 $S = \Psi(H) = \{\Psi(u,v) \mid (u,v) \in H\}$ 是光滑的 Jordan 曲面时, 称 (u,v) 平面上 H 的边界 $C = H - (H)$ 的像 $B = \Psi(C)$ 为曲面 S 的**边缘**. 从 S 中除去边缘 B, 剩余的部分用符号 (S) 表示:

$$(S) = S - B = \Psi((H)).$$

根据上述结果, (S) 由 S 唯一确定且不依赖于 S 的参数表示的参数的选择方法. 将 H 分割成具有有限个分段光滑边界的闭区域 $H_1, H_2, \cdots, H_i, \cdots, H_m$, 并且令 $S_i = \Psi(H_i)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 则每个 S_i 是光滑的 Jordan 曲面, 并且

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_i \cup \cdots \cup S_m, \quad (S_i) \cap (S_j) = \phi \quad (i \neq j),$$

此时, 根据定理 7.7,

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_m) \tag{9.29}$$

显然成立.

一般地, 对于分段光滑曲面 S, 当 S 是由有限个光滑的 Jordan 曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_m$ 的并集

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_i \cup \cdots \cup S_m, \quad (S_i) \cap (S_j) = \phi \quad (i \neq j),$$

表示时, *称 S 被分割成光滑的 Jordan 曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_m$*. 分段光滑的曲面 S 未必可以分割成有限个光滑的 Jordan 曲面, 但是 *S 被分割成光滑的 Jordan 曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ 时, S 的面积由*

$$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_m) \tag{9.30}$$

定义. 右边的 $A(S_1), A(S_2), \cdots, A(S_m)$ 显然是由 (9.26) 式定义的面积.

当 S 是光滑的 Jordan 曲面时, 已根据 (9.26) 式, 定义了面积 $A(S)$, 所以必须验证上述 (9.30) *式的面积与原来的* (9.26) *式的面积相一致*. 设 S 的参数表示为 $S = \Psi(H)$, 若令 $H_i = \Psi^{-1}(S_i), i = 1, 2, \cdots, m$, 则 H_i 是具有分段光滑边界的闭领域且 H 被分割成 $H_1, H_2, \cdots, H_i, \cdots, H_m$. 并且 $S_i = \Psi(H_i)$. 所以, 根据 (9.29) 式, (9.30) 式的面积 $A(S)$ 与原来 (9.26) 式的面积 $A(S)$ 是一致的.

一般地, 需要证明由 (9.30) 式定义的*面积* $A(S)$ *与* S *分割成光滑* Jordan *曲面* $S_1, S_2, \cdots, S_m$ *的分割方法无关*. 设 S 用另外的分割方法分割成光滑 Jordan 曲面

$T_1, \cdots, T_j, \cdots, T_n$. 则 S 被分割成更加 "充分细小" 的光滑 Jordan 曲面 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_\nu, \cdots, Z_N$, 并且若能使

$$S_i = \bigcup_{Z_\nu \subset S_i} Z_\nu, \quad T_j = \bigcup_{Z_\nu \subset T_j} Z_\nu, \tag{9.31}$$

则根据上述结果

$$A(S_i) = \sum_{Z_\nu \subset S_i} A(Z_\nu); \quad A(T_j) = \sum_{Z_\nu \subset T_j} A(Z_\nu).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} A(S_i) = \sum_{\nu=1}^{N} A(Z_\nu) = \sum_{j=1}^{n} A(T_j).$$

对于不存在满足条件 (9.31) 式的分割 $S = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_\nu \cup \cdots \cup Z_N$ 的证明[①], 在此省略.

例 9.6 举一个简单的例子. 求以原点 O 为中心、R 为半径的球面 $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ 的面积. 从方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 求 z 得 $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. 所以, 令

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

则 S 被分割成上半球面

$$S^+ = \{(x, y, f(x, y)) | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$$

和下半球面

$$S^- = \{(x, y, -f(x, y)) | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}.$$

$f(x, y)$ 在闭圆盘 $K = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ 上连续且在 $(K) = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < R^2\}$ 上连续可微. 并且

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

所以, 根据 (9.27) 式, S^+ 的面积为

$$A(S^+) = \int_{(K)} \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(K)} \frac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

---

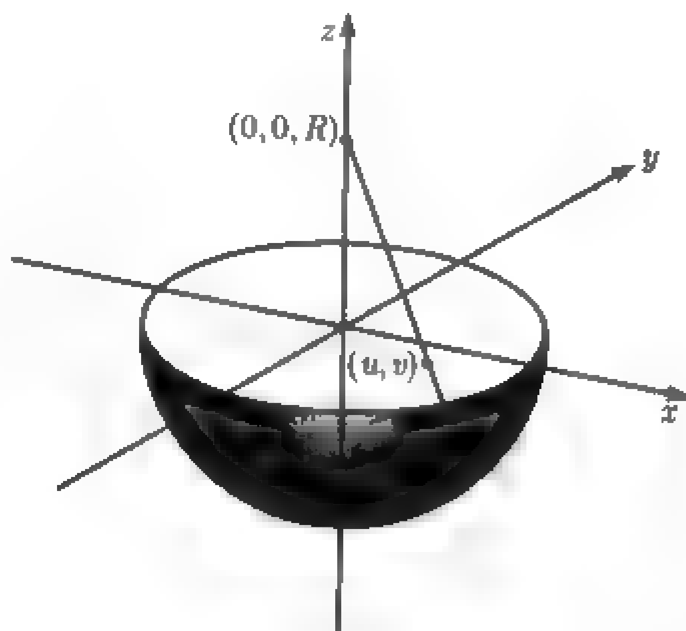
① 根据 Lebesgue 积分论, 证明是平凡的. 应用上, 根据 (9.30) 式求解具体的曲面 S 的面积时, 将 S "自然" 地分割成光滑 Jordan 曲面 $S_1, S_2, \cdots, S_m$. 对于 S 的两个自然的分割 $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$ 和 $S = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$, 通常存在满足 (9.31) 式的分割 $S = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_N$.

若令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$A(S^+)=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{Rr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=2\pi R^2.$$

同理, $A(S^-)=2\pi R^2$. 故半径为 R 的曲面 S 的面积为 $A(S)=4\pi R^2$.

以上根据公式 (9.27) 求得了半球面 S^+ 和 S^- 的面积. 但是严密地来讲, 首先必须验证 S^+ 和 S^- 是光滑的 Jordan 曲面. 因为 S^+ 和 S^- 都一样, 所以以 S^- 为例进行讨论. 设连结点 $(x,y,z)\in S^-$ 和点 $(0,0,R)$ 的线段与平面 (x,y) 的交点为 (u,v), 则



$$x=\frac{2R^2u}{R^2+u^2+v^2},\quad y=\frac{2R^2v}{R^2+u^2+v^2},\quad z=\frac{u^2+v^2-R^2}{R^2+u^2+v^2}R.$$

事实上, 若令 $\lambda=(R-z)/R$, 则 $x=\lambda u, y=\lambda v, z=R-\lambda R$, 故

$$R^2=x^2+y^2+z^2=\lambda^2(u^2+v^2)+(R-\lambda R)^2.$$

因此, $\lambda=2R^2/\left(R^2+u^2+v^2\right)$. 所以, 若令

$$\varphi(u,v)=\frac{2R^2u}{R^2+u^2+v^2},\quad \psi(u,v)=\frac{2R^2v}{R^2+u^2+v^2},\quad \chi(u,v)=\frac{u^2+v^2-R^2}{R^2+u^2+v^2}R,$$

则

$$S^-=\{(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))|u^2+v^2\leqslant R^2\}$$

是下半球面 S^- 的参数表示. $\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)$ 是 (u,v) 平面上的连续可微

函数, 并且

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \frac{4R^4(R^2-u^2-v^2)}{(R^2+u^2+v^2)^3},$$

$$\begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix} = \frac{-8R^5u}{(R^2+u^2+v^2)^3},$$

$$\begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix} = \frac{-8R^5v}{(R^2+u^2+v^2)^3}.$$

所以

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi_u & \chi_v \\ \varphi_u & \varphi_v \end{vmatrix}^2 = \frac{16R^8}{(R^2+u^2+v^2)^4} > 0. \qquad (9.32)^{①}$$

显然映射 $\Psi:(u,v)\to(x,y,z)=(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))$ 是从闭圆盘 $H=\{(u,v)\,|u^2+v^2\leqslant R^2\}$ 到 S^- 上的一一映射. 所以 S^- 是光滑的 Jordan 曲面. 并且, $\varpi\circ\Psi:(u,v)\to(x,y)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ 是从 (H) 到 (K) 上的映射. 所以 S^- 的面积 $A(S^-)$ 可以由公式 (9.27) 获得.

当然, 利用 (9.32) 式可以从定义 (9.26) 式直接求得面积 $A(S^-)$. 即根据 (9.32) 式,

$$A(S^-)=\int_H \frac{4R^4}{(R^2+u^2+v^2)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

令 $u=r\cos\theta, v=r\sin\theta$, 则

$$A(S^-)=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{4R^4r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(R^2+r^2)^2}=8\pi R^4\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(R^2+r^2)^2}=2\pi R^2.$$

例 9.7 令 $K_1=\{(x,y)\,|\,(x-R/2)^2+y^2\leqslant R^2/4\}$, 求上述上半球面 S^+ 在闭圆盘 K_1 上的部分:

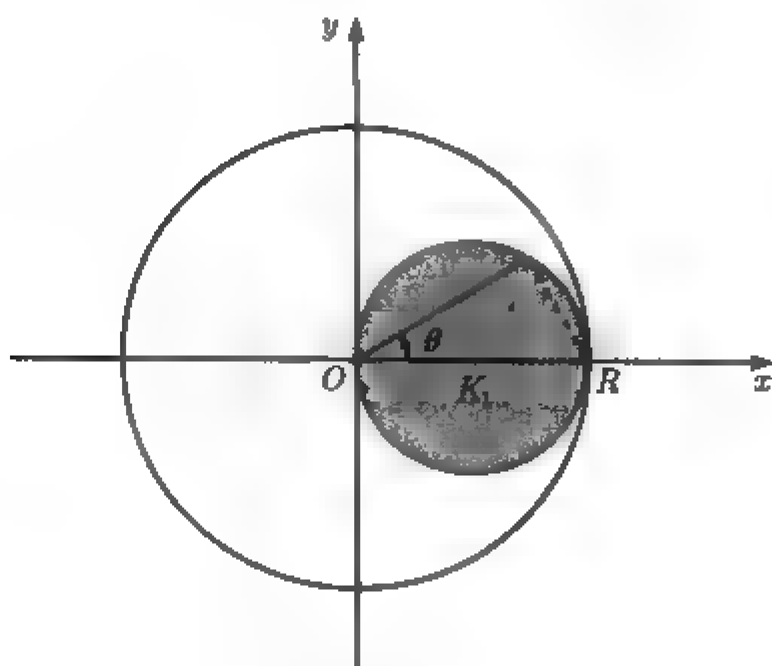
$$S_1^+=\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in K_1\},\quad f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

的面积. 利用极坐标 (r,θ), 则 K_1 由 $K_1=\{(r,\theta)\,|0\leqslant r\leqslant R\cos\theta,-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\}$, 表示. 所以, 根据 (9.27) 式, S_1^+ 的面积为

$$\begin{aligned}A(S_1^+)&=\int_{(K_1)}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{(K_1)}\frac{R\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\\&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}R\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{R^2-r^2}}=R\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(R-\sqrt{R^2-R^2\cos^2\theta})\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

① 关于 $R=1$ 的情况下的结果已经在例 8.1 中阐述.

$$= R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - |\sin\theta|) \mathrm{d}\theta = \pi R^2 - 2R^2.$$



在面积的定义 (9.26) 式右边的 $\sqrt{\ }$ 中, 因为

$$\begin{aligned}&(\varphi_u\psi_v - \varphi_v\psi_u)^2 + (\psi_u\chi_v - \psi_v\chi_u)^2 + (\chi_u\varphi_v - \chi_v\varphi_u)^2 \\ &= (\varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2)(\varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2) - (\varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v)^2,\end{aligned}$$

所以, 若令

$$\begin{aligned}E(u,v) &= \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2, \\ F(u,v) &= \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v + \chi_u\chi_v, \\ G(u,v) &= \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2\end{aligned}$$

则 (9.26) 式可以改写为

$$A(S) = \int_H \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F(u,v)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{9.33}$$

例 9.8 在 (x, y) 平面上 $y > 0$ 部分上的光滑 Jordan 曲线 $C = \{(\varphi(u), \psi(u)) | a \leqslant u \leqslant b\}, \psi(u) > 0$, 绕 x 轴旋转一周形成的曲面 S 称为**旋转曲面**. C 绕 x 轴仅旋转 θ 角时, 将 C 上的每一点 $(\varphi(u), \psi(u))$ 分别移到点

$$\Psi(u,\theta) = (\varphi(u), \psi(u)\cos\theta, \psi(u)\sin\theta).$$

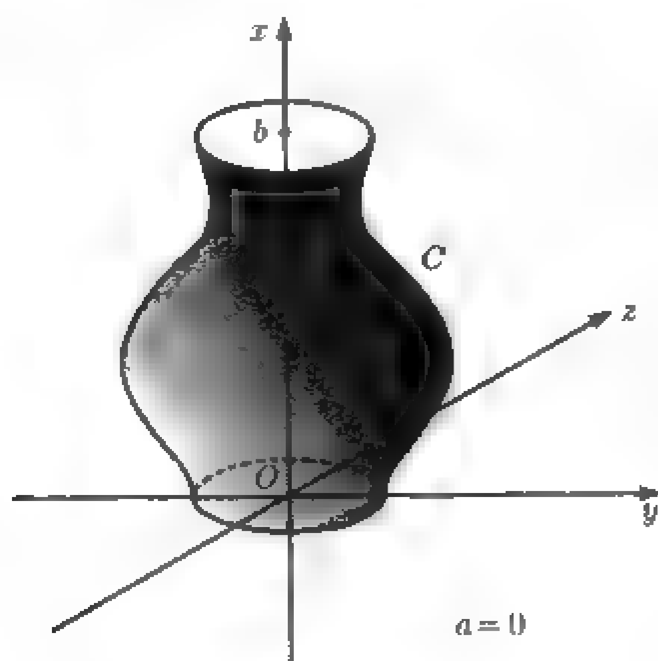
所以 S 由参数表示

$$S = \{\Psi(u,\theta) | a \leqslant u \leqslant b, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} \tag{9.34}$$

给出. 此时由于

$$E(u,\theta) = \varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2, \quad F(u,\theta) = 0, \quad G(u,\theta) = \psi(u)^2,$$

所以根据 (9.33) 式得 S 的面积为



$$A(S) = 2\pi \int_a^b \psi(u)\sqrt{\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2}\mathrm{d}u. \tag{9.35}$$

此时, S 不是 Jordan 曲面, 而是被分割成两个 Jordan 曲面, 例如, 分割成 $S_1 = \{\Psi(u,\theta)\,|a \leqslant u \leqslant b, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ 和 $S_2 = \{\Psi(u,\theta)\,|a \leqslant u \leqslant b, \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. 根据 (9.33) 式, 可以求得 $A(S_1)$ 和 $A(S_2)$. 并且若取其和, 就可以获得 (9.35) 式.

作为 (9.35) 式的应用, 计算旋转椭圆体的表面 S . $x^2/a^2+y^2/c^2+z^2/c^2=1, a>c>0$ 的面积. 求椭圆方程 $x^2/a^2+y^2/c^2=1$ 关于 y 的解, 可得 $y=\pm c\sqrt{1-x^2/a^2}$. 因此, 若在 (9.34) 式中, 令 $\varphi(u)=u$, $\psi(u)=c\sqrt{1-u^2/a^2}$, 将不等式 $a \leqslant u \leqslant b$ 用 $-a \leqslant u \leqslant a$ 替换, 则可得旋转椭圆面 S 的参数表示. 通过简单计算,

$$\psi(u)\sqrt{1+\psi'(u)^2} = c\sqrt{1-(a^2-c^2)u^2/a^4},$$

所以根据 (9.35) 式,

$$A(S) = 2\pi c\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{a^2-c^2}{a^4}u^2}\mathrm{d}u.$$

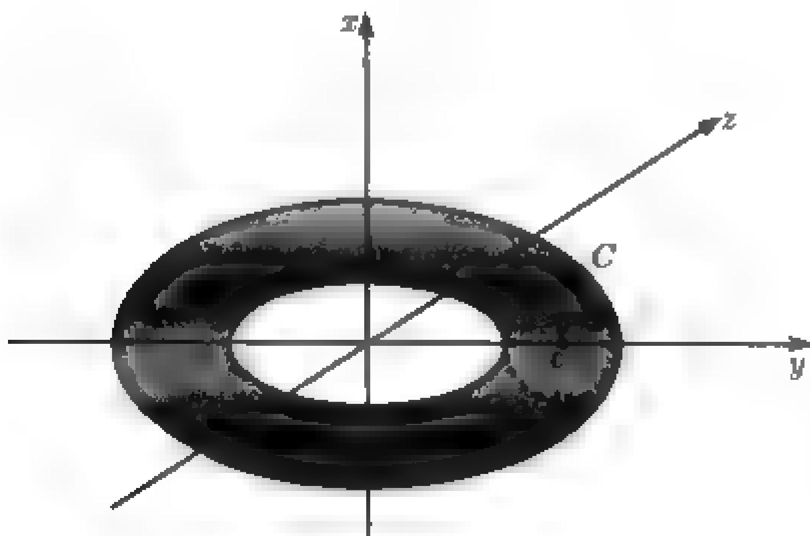
因为 $\int\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = (1/2)(t\sqrt{1-t^2}+\mathrm{Arcsin}\,t)$, 所以若令 $t=(\sqrt{a^2-c^2}/a^2)u$, 则可直接求得上式右边的积分值. 即获得

$$A(S) = 2\pi\left(c^2+\frac{a^2c}{\sqrt{a^2-c^2}}\mathrm{Arc\,sin}\,\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right).$$

当 $C=\{(\varphi(u),\psi(u))\,|a \leqslant u \leqslant b\}\ (\psi(u)>0)$ 是光滑 Jordan 闭曲线时, C 绕 x 轴旋转形成的旋转曲面 S 是光滑闭曲面. 此时, S 的面积也由 (9.35) 式给出. 这仅须将 C 分割成两个 Jordan 曲线 C_1, C_2 后即可看出.

例如, 给定 c 和 $\rho, 0 < \rho < c$, 若令 $\varphi(u) = \rho\sin u, \psi(u) = c + \rho\cos u$, 则 $C = \{(\varphi(u), \psi(u)) | 0 \leqslant u \leqslant 2\pi\}$ 是以 y 轴上点 $(0, c)$ 为中心、ρ 为半径的圆周, 当其绕 x 轴旋转时, 形成环面(torus)S. 因为 $\varphi'(u)^2 + \psi'(u)^2 = \rho^2$, 根据 (9.35) 式, S 的面积为

$$A(S) = 2\pi\rho\int_0^{2\pi}(c + \rho\cos u)\mathrm{d}u = 4\pi^2\rho c.$$



习 题

63. 求方程 $y^2 = 4ax (a > 0)$ 确定的抛物线的原点 $(0,0)$ 到点 $(x, y), y = 2\sqrt{ax}$ 的弧长.
64. 当 $P(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), t^2), \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ 时, 若 $0 < t \leqslant 1$, 令 $\varphi_1(t) = t^3\cos(2\pi/t)$, $\varphi_2(t) = t^3\sin(2\pi/t)$, 则可获得 $\mathscr{C}^1$ 类空间曲线 $C = \{P(t)\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 试求此空间曲线 C 的长度.
65. 设 $r(\theta)$ 是定义在闭区间 $[0, 2\pi]$ 上的关于 θ 的连续可微函数, $r(0) = r(2\pi)$. 证明: 当 $0 < \theta < 2\pi$, $r(\theta) > 0$ 时, 若令 $P(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, 则闭曲线 $C = \{P(\theta) | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 除去至多一个点 $P(0) = P(2\pi)$ 外都光滑, 并且 C 的长度

$$l(C) = \int_0^{2\pi}\sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

66. 在 65 题中, 当 $r(\theta) = a(1 - \cos\theta)$ 时, 称曲线 $C = \{P(\theta) | 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 为 **Cardioid**. 试求 Cardioid 的长度.

附　　录

连续性与可微性(参考例 3.1)

称 $r+s\sqrt{d}$ (r, s 为有理数, $s\neq 0, d$ 为自然数) 形式的无理数为二次无理数. 显然, 二次无理数在数轴 $\mathbf{R}$ 上处处稠密地分布. 设 α 为二次无理数, 则存在由 α 确定的正实数 σ, 使得对于任意的分数 q/p (p 为自然数, q 为整数), 不等式

$$\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|>\frac{\sigma}{p^2}$$

成立. 为证明这个结论, 令 $\alpha=r+s\sqrt{d},\beta=r-s\sqrt{d}$, 当 u 为变量时,

$$(u-\alpha)(u-\beta)=u^2-2ru+r^2-s^2d.$$

取自然数 a, 使得

$$a(u-\alpha)(u-\beta)=au^2+bu+c\quad [b=-2ar, c=a(r^2-s^2d)]$$

是 u 的整系数二次式. 将 q/p 代入 u 且两边乘上 p^2, 可得

$$ap^2\left(\frac{q}{p}-\alpha\right)\left(\frac{q}{p}-\beta\right)=aq^2+bpq+cp^2,$$

此式左边不是 0, 右边是整数. 所以

$$ap^2\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|\left|\frac{q}{p}-\beta\right|\geqslant 1,$$

因此, 若令 $\Delta=q/p-\alpha,\delta=\beta-\alpha$, 则

$$ap^2|\Delta||\Delta-\delta|\geqslant 1.$$

取正实数 σ 使得 $a\sigma(\sigma+|\delta|)<1$. 为了证明 $|\Delta|>\sigma/p^2$, 若假设 $|\Delta|\leqslant\sigma/p^2$, 则

$$|\Delta-\delta|\leqslant|\Delta|+|\delta|\leqslant\frac{\sigma}{p^2}+|\delta|\leqslant\sigma+|\delta|,$$

所以, 可得

$$ap^2|\Delta||\Delta-\delta|\leqslant a\sigma(\sigma+|\delta|)<1,$$

这与 $ap^2|\Delta||\Delta-\delta|\geqslant 1$ 矛盾. 所以, $|\Delta|>\sigma/p^2$.

区间 $(0,1)$ 上的函数 $f(x)$ 定义为: 当 x 为无理数时, $f(x)=0$; 当 x 为有理数, 即为不可约分数 q/p 时, $f(q/p)=1/p^3$. 则显然这个函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内所有的有理点处不连续. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的任意二次无理数 α 处可微.

[证明] 当 $x(x\neq\alpha)$ 是无理数时, 显然可得 $(f(x)-f(\alpha))/(x-\alpha)=0$. 所以可设 x 是不可约分数: $x=q/p$. 于是

$$\left|\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right|=\left|f\left(\frac{q}{p}\right)\right|\Big/\left|\frac{q}{p}-\alpha\right|<\left(\frac{1}{p^3}\right)\Big/\left(\frac{\sigma}{p^2}\right)=\frac{1}{p\sigma}.$$

对于任意的正实数 μ, 因为满足 $p<\mu$ 的不可约分数 q/p $(0<q/p<1)$ 仅有有限个, 所以, 当 $q/p\to\alpha$ 时, $p\to+\infty$. 所以

$$\lim_{\frac{q}{p}\to\alpha}\left(f\left(\frac{q}{p}\right)-f(\alpha)\right)\Big/\left(\frac{q}{p}-\alpha\right)=0,$$

即 $f(x)$ 在 α 处可微且 $f'(\alpha)=0$. □

通过与例 2.4 同样的方法可以验证 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的所有无理点处连续. 若将二次无理数称为二次无理点, 则如上述, $f(x)$ 在二次无理点处可微, 而在任意的无理点处未必可微. 我们举一例, 考虑

$$\rho=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{24}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n!}}.$$

此式右边的级数收敛, 并且显然有 $1/2<\rho<1$. 当 $m\geqslant 2$ 时, 若令

$$\rho_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^{n!}}=\frac{q_m}{2^{m!}},\quad q_m=2^{m!-1}+\cdots+2^{m!-(m-1)!}+1,$$

则因为 q_m 是奇数, 所以 $q_m/2^{m!}$ 是不可约分数. 要验证 ρ 为无理数, 我们用反证法, 不妨假设 ρ 等于分数 q/p, 则

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n!}}<\frac{2}{2^{(m+1)!}},$$

所以

$$0<\frac{q}{p}-\frac{q_m}{2^{m!}}=\rho-\rho_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{n!}}<\frac{2}{2^{(m+1)!}}.$$

若这个式子两边同乘以 $2^{m!}p$, 则可得不等式:

$$0<2^{m!}q-pq_m<\frac{p}{2^{m!}}.$$

若取 m 使得 $2^{m!}>p$, 则这个不等式与 $2^{m!}q-pq_m$ 是整数相矛盾. 所以 ρ 是无理数.

因为 $\rho_m=q_m/2^{m!}$ 是不可约分数, 所以 $f(\rho_m)=1/2^{3m!}$. 因此当 $m\geqslant 4$ 时,

$$\left|\frac{f(\rho_m)-f(\rho)}{\rho_m-\rho}\right|>\frac{1}{2^{3m!}}\Big/\frac{2}{2^{(m+1)!}}=\frac{2^{(m-2)m!}}{2}>2^{m!}.$$

因为当 $m \to +\infty$ 时, $\rho_m \to \rho$; 当 x 为无理数时, $(f(x)-f(\rho))/(x-\rho)=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to\rho}(f(x)-f(\rho))/(x-\rho)$ 不存在. 即 $f(x)$ 在 ρ 处不可微. 对于属于区间 $(0,1)$ 的形如 $\rho+r$(r 为有理数) 的任意实数, 同样可以证明 $f(x)$ 在 $\rho+r$ 处不可微.

总之, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内的有理点处不连续; 在无理点处连续; 在二次无理点处可微; 在 $\rho+r(r\in\mathbf{Q})$ 处连续, 但不可微. **$f(x)$ 的不连续点、连续点、可微的点、连续但不可微的点, 分别在区间 $(0,1)$ 上处处稠密地分布.**

考虑这种奇妙的函数, 对于我们精确地把握微分系数的意义是很有用的. 虽然记: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))/(x-a)$, 但我们知道 $f'(a)$ 粗略地表示函数 $f(x)$ 的图像的曲线在 $x=a$ 处的切线的倾斜度等, 但是求这种奇妙的函数的微分系数很难, 因为这种函数的图像不能成为曲线.

ρ 被称为 Liouville 数. ρ 为二次无理数, α 也同时是无理数, 但它们的性质却完全不同. 关于 α, 对于任意分数 q/p, 如上所述, 不等式

$$\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\geqslant\frac{\sigma_\alpha}{p^2},\quad \sigma_\alpha>0, \tag{3.9}$$

成立. 这里, 把常数 σ 记为 σ_α 是为了说明 σ 依赖于 α. 关于 ρ, 若令 $p_m=2^{m!}$, 则 $2^{(m+1)!}=p_m^{m+1}$, 所以

$$\left|\rho-\frac{q_m}{p_m}\right|<\frac{2}{p_m^{m+1}}\leqslant\frac{1}{p_m^m}.$$

对于自然数 n, 每个分数 q/p 的 $1/np^2$ 邻域, 即开区间 $(q/p-1/np^2,q/p+1/np^2)$, 它们的并集设为

$$W_n=\bigcup_{\frac{q}{p}}\left(\frac{q}{p}-\frac{1}{np^2},\frac{q}{p}+\frac{1}{np^2}\right).$$

则 W_n 是包含有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的开集, 并且 $W_1\supset W_2\supset\cdots\supset W_n\supset W_{n+1}\supset\cdots$ 对于任意的自然数 n, 若选 m, 使得 $(p_m)^{m-2}\geqslant n$, 则

$$\left|\rho-\frac{q_m}{p_m}\right|<\frac{1}{p_m^m}\leqslant\frac{1}{n{p_m}^2},$$

所以 $\rho\in W_n$, 即 ρ 包含于所有的 W_n 中. 根据 (3.9) 式, 当 $n>1/\sigma_\alpha$ 时, 二次无理数 α 不包含于 W_n. 即 “ρ 比所有的二次无理数更加贴近 $\mathbf{Q}$”. 无理数的这种不同性质, 反映在微积分学的微妙问题之中.

解答, 提示

第 1 章

1. 任意给定的两个无理数 β 和 γ 分别用无限不循环小数 $\beta = b.\,b_1b_2b_3\cdots$ 和 $\gamma = c.\,c_1c_2c_3\cdots$ 表示时, 若 $\beta < \gamma$, 那么存在 n 满足 $b_n < c_n$. 此时, 例如, 对于 $m > n, b_m \leqslant 8$, 仅把 β 的第 m 位小数用比 b_m 大的数替换, 所得无限小数设为 γ_m, 则这些是互不相同的无限不循环小数, 且满足 $\beta < \gamma_m < \gamma$. 因为这样的 γ_m 存在无穷个, 所以介于 β 和 γ 之间的互不相同的无理数存在无穷个.
2. 只须分三种情形考虑即可: 当 α, β 同为正数时; 当 α, β 互为异号时; 当两者同为负数时.
3. 对于任意给定的正实数 ε, 取 $M = n_0\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 充分大时, 若 $n > M$, 则 $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 又因为, 若 $n > M$, 则

$$\begin{aligned}|b_n - \alpha| &= \frac{1}{n}|(a_1-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\{|a_1-\alpha|+\cdots+|a_M-\alpha|+|a_{M+1}-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|\} \\ &< \frac{1}{n}\left\{|a_1-\alpha|+\cdots+|a_M-\alpha|+(n-M)\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\end{aligned}$$

现令 $|a_1-\alpha|,\cdots,|a_M-\alpha|$ 的最大值为 K, 则上面的最后一个式子

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(MK+\frac{n-M}{2}\varepsilon\right) < \frac{1}{n}\left(MK+\frac{n}{2}\varepsilon\right).$$

这里, 若 $n > N$, 则对于满足 $MK/n < \varepsilon/2$ 的充分大的自然数 N, 当 $n > N$ 时,

$$\frac{1}{n}\left(MK+\frac{n}{2}\varepsilon\right) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以, $b_n \to \alpha$.

4. 当 $n \geqslant 2$ 时, $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, 所以

$$\sum_{n=3}^{m}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=3}^{m}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{m},$$

从而

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leqslant 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} < 2.$$

5. 令 $\alpha = \limsup a_m$. 因为对于 $\varepsilon = 1/n$, 存在无数个 a_m 使得 $\alpha+\varepsilon > a_m > \alpha-\varepsilon$. 所以从中选取一个设为 $a_{m(n)}$ 则对于任意的 n, 因为 $\left|a_{m(n)}-\alpha\right| < 1/n$, 所以子列 $\left\{a_{m(n)}\right\}$ 收敛于 α.

6. 设 $\{P_n\}$ 是一个有界点列, 令 $P_n=(x_n,y_n)$. 因为数列 $\{x_n\}$ 有界, 所以具有收敛的子列. 从而, 一开始就可以设 $\{x_n\}$ 收敛. 令 $x_0=\lim x_n$. 又因为数列 $\{y_n\}$ 也有界, 从而也有收敛的子列 $\{y_{n_i}\}$. 于是, 若令 $y_0=\lim y_{n_i}$, 则子列 $\{P_{n_i}\}$ 收敛于 $P_0=(x_0,y_0)$.
7. 设 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $Q=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $R=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, 则欲证明的不等式可以写成
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}.$$
对于每个 $i, i=1,\cdots,n$, 令 $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$, 则上式变为
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2}.$$
关于 t 的二次式 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_it)^2$ 恒 $\geqslant 0$, 所以判别式 $\leqslant 0$, 并且
$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$
因此
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\\&\leqslant\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.\end{aligned}$$
两边取平方根, 就可以获得所求的不等式.
8. 根据算术平均值 $\geqslant$ 几何平均值, 得 $0<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n$. 因此数列 $\{a_n\}$ 有下界且单调递减. 数列 $\{b_n\}$ 有上界且单调递增. 所以根据定理 1.20, 二者都存在极限. 设 $\alpha=\lim a_n$, $\beta=\lim b_n$. 于是, 若在 $a_{n+1}=(a_n+b_n)/2$ 的两边取极限, 则 $\alpha=(\alpha+\beta)/2$, 从而 $\alpha=\beta$.
9. 因为
$$\begin{aligned}a_n-\sqrt{2}&=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-2\sqrt{2}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{\frac{2}{a_{n-1}}}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{(a_{n-1}-\sqrt{2})^2}{a_{n-1}}\\&=\frac{(a_{n-1}-\sqrt{2})}{2}\frac{(a_{n-1}-\sqrt{2})}{a_{n-1}}<\frac{(a_{n-1}-\sqrt{2})}{2}.\end{aligned}$$
所以
$$0<a_n-\sqrt{2}<\frac{a_{n-1}-\sqrt{2}}{2}<\cdots<\frac{a_1-\sqrt{2}}{2^{n-1}},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

10. (参考例 5.9) 因为当 $n \geqslant 3$ 时, $n^n \geqslant n^3 \geqslant n+1$, 所以

$$\begin{aligned}(n+1)^n &= n^n + nn^{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)n^{n-2} + \cdots + n + 1\\ &\leqslant n^n + n^n + n^n + \cdots + n^n \quad (n \text{ 个})\\ &= n^{n+1},\end{aligned}$$

因此

$$n^{1/n} \geqslant (n+1)^{1/(n+1)} \geqslant 1.$$

故, 此数列 $\{n^{1/n}\}$ 有界且单调递减, 从而收敛. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \alpha \geqslant 1$, 所以设 $n^{1/n} = 1 + a_n(a_n > 0)$, 则

$$\begin{aligned}n = (a_n+1)^n &= 1 + na_n + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2 + \cdots + a_n^n\\ &> 1 + \frac{1}{2}n(n-1)a_n^2.\end{aligned}$$

因此, $a_n^2 < 2/n \to 0$, 从而 $n^{1/n} \to 1$.

第 2 章

11. 由复合函数的性质, 显然连续. 若令 $x_n = 1/(n+1/2)\pi$, $y_n = 1/n\pi$, 则虽然 $|x_n - y_n| \to 0$, 但是 $|\sin 1/x_n - \sin 1/y_n| = 1$, 所以对于任意取定的一个正实数 ε, 无论怎样选取 $\delta > 0$,

$$\text{若 } 0 < x, \quad 0 < x', \quad |x - x'| < \delta, \quad \text{则 } \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x'}\right| < \varepsilon$$

并不能成立. 因此 $\sin 1/x$ 非一致连续.

12. 假设不存在最大值. 对于每个 n 都能够从这个闭区间中选取使得 $f(a_n) \geqslant n$ 成立的 a_n. 数列 $\{a_n\}$ 具有收敛的子列 $\{a_{n_j}\}$. 设 $\lim a_{n_j} = \alpha$, 则根据 $f(x)$ 的连续性, $\lim f(a_{n_j}) = f(\alpha)$, 又因为 $f(a_{n_j}) \geqslant n_j$, 所以这与 $\lim f(a_{n_j}) = +\infty$ 矛盾.

13. 假设非一致连续, 对于某个正实数 $\varepsilon > 0$, 不论怎样选取 $\delta > 0$, 都存在满足 $|x - y| < \delta$ 且 $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$ 的 x 与 y. 又, 对于 $\delta = 1/n$, 选 a_n, b_n 使得 $|a_n - b_n| < 1/n$ 且 $|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon$. 因为数列 $\{a_n\}$ 具有收敛的子列, 所以, 从一开始我们就可以设 $\{a_n\}$ 收敛于 α. 此时, 因为

$$|b_n - \alpha| \leqslant |b_n - a_n| + |a_n - \alpha| < \frac{1}{n} + |a_n - \alpha| \to 0,$$

所以, $\{b_n\}$ 也收敛于 α. 因此, 这与 $f(a_n) - f(b_n) \to f(\alpha) - f(\alpha) = 0$ 的假设相矛盾.

14. 若用 $f(x) - l_x$ 来代替 $f(x)$, 则一开始就可以假定 $l = 0$. 进而, 若用 $|f(x)|$ 来代替 $f(x)$, 则 $f(x) \geqslant 0$. 根据假设, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 x_0 使得

$$若\ x \geqslant x_0,\quad 则\quad |f(x+1)-f(x)| < \varepsilon\ 成立.$$

连续函数 $f(x)$ 在每个闭区间 $[n, n+1]$(n 为自然数, $n \geqslant a$) 上具有最大值. 把它设为 $f(x_n), n \leqslant x_n \leqslant n+1$. 当 $n \geqslant x_0+1$ 时,

$$f(x_n)-f(x_n-1)=f(x_n-1+1)-f(x_n-1)<\varepsilon,$$

因为 x_n-1 属于区间 $[n-1, n]$, 所以 $f(x_n-1) \leqslant f(x_{n-1})$, 因此

$$f(x_n)-f(x_{n-1})<\varepsilon.$$

设 $m \geqslant x_0$, m 为自然数, 则对于 $n, n=m+1, m+2, \cdots$, 此不等式成立. 若取其和, 则

$$f(x_n)-f(x_m)<(n-m)\varepsilon,$$

因此,

$$\frac{f(x_n)}{n}<\frac{f(x_m)}{n}+\varepsilon.$$

又因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 所以

$$\frac{f(x_n)}{n} \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

因为任意的 x 属于某区间 $[n, n+1]$, 所以 $f(x) \leqslant f(x_n)$. 又因为 $x \geqslant n$, 所以

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x_n)}{n} \to 0 \quad (x \to +\infty).$$

15. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a, x=b$ 处一致, 并且因为

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\{g(x)+g(y)\},$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\},$$

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在把 $[a, b]$ 分成 2^n 等份的所有的点上也一致. 这样点的全体集合在 $[a, b]$ 上稠密, 所以, 连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必一致.

16. 将下式

$$P_0(x)e^{nx}+P_1(x)e^{(n-1)x}+\cdots+P_{n-1}(x)e^{x}+P_n(x)=0$$

的两边同除以 e^{nx}, 则可得

$$P_0(x)+P_1(x)\frac{1}{e^{x}}+\cdots+P_{n-1}(x)\frac{1}{e^{(n-1)x}}+P_n(x)\frac{1}{e^{nx}}=0.$$

如果 $P_0(x)=0$ 不成立, 那么当 $x \to +\infty$ 时, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k/e^x=0$, 所以虽然第二项以后为 0, 但是 $|P_0(x)|$ 发散于无限大, 这是相矛盾的. 因此, $P_0(x)=0$, 重复以上过程, 则 $P_0(x)=P_1(x)=\cdots=P_n(x)=0$.

17. 令 $b_n=\ln a_n$, 则 $b_n \to \ln \alpha$. 因为 $\ln\{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}\}=(1/n)(b_1+\cdots+b_n)$, 所以根据习题 3, 这个数列也收敛于 $\ln \alpha$. 因此, $\lim (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n}=\alpha$.

18. 令 $a_n=(1+1/n)^n$, 则 $a_n\to e$. 所以, 根据习题 17,

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{1/n}$$

$$=\left\{\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right\}^{1/n}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{1}{n}(n+1)^n\right\}^{1/n}=\frac{1}{(n!)^{1/n}}(n+1)$$

也收敛于 e. 因此

$$\frac{(n!)^{1/n}}{n}=\frac{(n!)^{1/n}}{n+1}\frac{n+1}{n}\to e^{-1}.$$

19. 如果 $a=1$, 则结论显然成立. 所以设 $a\neq 1$. 令

$$y_n=\frac{\ln a}{n},$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=0$. 又因为, 当 $y_n\to 0$ 时,

$$\frac{e^{y_n}-1}{y_n}\to 1,$$

所以

$$n(\sqrt[n]{a}-1)=\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\ln a}\ln a=\frac{e^{y_n}-1}{y_n}\ln a\to\ln a.$$

20. 将 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 的两边同时取 n 次方, 则

左边 $=e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$

右边 $=(\cos x+i\sin x)^n=\cos^n x+ni\cos^{n-1}x\sin x$

$$-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x-i\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\cdots+i^n\sin^n x.$$

比较两边的实部和虚部, 则可得

$$\cos nx=\cos^n x-\frac{n(n-1)}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\begin{pmatrix}n\\2k\end{pmatrix}\cos^{n-2k}x\sin^{2k}x+\cdots,$$

$$\sin nx=n\cos^{n-1}x\sin x-\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\cdots$$

$$+(-1)^{k-1}\begin{pmatrix}n\\2k-1\end{pmatrix}\cos^{n-2k+1}x\sin^{2k-1}x+\cdots.$$

第 3 章

21.
$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{x^n+nx^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\cdots-x^n}{h}$$
$$=nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\to nx^{n-1}.$$

22. 若在所有点处都有 $f(x)=f(a)$, 以 ξ 为例, 设为 $a+1$ 即可. 考虑使 $f(x_0)>f(a)$ 成立的 x_0 存在的情况. 取 ε 使得 $\varepsilon=f(x_0)-f(a)$ 时, 若 $x>M$, 则 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 所以, 存在满足 $f(x)-f(a)<f(x_0)-f(a)$ 的实数 M. 若 $x>M$, 则 $f(x)<f(x_0)$, 这蕴含在 $[a,M]$ 中存在 $f(x)$ 的最大值. 因此以下的讨论, 可以参考 3.3 节开始时的讨论.

23. 根据定理 3.9, 存在满足
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
的 $c, a<c<x$. 当 $x\to a+0$ 时, $c\to a+0$, 有
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=l.$$

24. 因为 $y=((a^x+b^x)/2)^{1/x}$ 为正, 所以若两边取对数且令 $\ln y=(1/x)\ln((a^x+b^x)/2)$. 则可利用习题 23. 因为
$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)}{x},$$
又因为
$$\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{2}(a^x\ln a+b^x\ln b)}{\dfrac{a^x+b^x}{2}}=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab},$$
所以
$$\lim_{x\to+0}y=\sqrt{ab}.$$

25. 设 $f(x)=x-\cos x$, 则当 $x_n=\pi/2+2n\pi$, n 为整数时, $f'(x)=1-\sin x\geqslant 0$, 或者 $f'(x)=0$ 成立. 这些点在实数集中是不稠密的, 所以 $f(x)$ 是单调递增函数. 此外, 因为 $f(0)=-1<0, f(\pi/2)=\pi/2>0$, 所以 $f(x)=0$ 仅有一个零点.

26. 利用归纳法. 当 $n=1$ 时, 结论显然, 所以设 $n\geqslant 2$. 因为
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right\}$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{(-1)^{n-1}H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}\}$$
$$=(-1)^n\{2xH_{n-1}(x)-H'_{n-1}(x)\}\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).$$

因此 $H_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式. 设 $H_{n-1}(x) = 0$ 的 $n-1$ 个根为

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$$

则 $\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}$ 在点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 处等于零. 又根据 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, $H_n(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $\cdots$, $(x_{n-1}, +\infty)$ 中的每个区间, 至少分别具有一个实数根. 此外, 至多一共具有 n 个实数根. 因此, $H_n(x)$ 恰好具有 n 个不同的实数根.

27. 如果

$$f'(x+\theta h) = f'(x+\theta_1 h), \quad \theta \neq \theta_1$$

则根据中值定理, 存在满足

$$f'(x+\theta h) - f'(x+\theta_1 h) = (\theta-\theta_1)hf''(x+\theta h+\theta_2(\theta-\theta_1)h) = 0$$

的 $\theta_2, 0 < \theta_2 < 1$. 这与 $f'' \neq 0$ 矛盾. 因此, 必有 $\theta = \theta_1$. 将

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x+\theta h)h \\ &= f(x) + \{f'(x) + f''(x)\theta h + o(\theta h)\}h \\ &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\theta h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

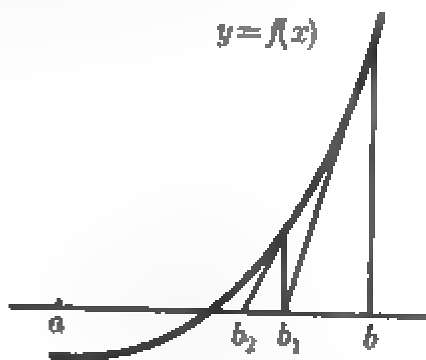
与 Taylor 公式

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

相比较, 则得

$$\theta \to \frac{1}{2}.$$

28. 参考下图. 根据假设, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a < b_n < b_{n-1}$. 即



这是具有下界的单调递减数列故收敛. 令 $\lim b_n = \beta$ 且取

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}$$

两边的极限, 则

$$\beta = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

这与 $f(\beta) = 0$ 一致.

29. 设 $\xi = (1/n)(x_1 + \cdots + x_n)$, 则

$$f(x_i) = f(\xi) + (x_i - \xi)f'(\xi) + \frac{1}{2}(x_i - \xi)^2 f''(\xi + \theta_i(x_i - \xi)), \quad 0 < \theta_i < 1$$

所以

$$f(x_i) \geqslant f(\xi) + (x_i - \xi)f'(\xi),$$

从而获得所求的不等式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant nf(\xi) + f'(\xi)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi) = nf(\xi).$$

当且仅当 $x_i = \xi\,(i = 1, \cdots, n)$ 时等号成立.

30. 因为 $(-\ln x)'' = 1/x^2 > 0$, 所以在 $f(x) = -\ln x$ 中, 应用习题 29, 则

$$-\ln\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant -\frac{\ln x_1 \cdots x_n}{n} = -\ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

因此

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

第 4 章

31. (1) 设 $e^x = t$, 则由 $dx = dt/t$, 原式

$$\int \frac{\frac{dt}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{Arctan}\, t = \text{Arctan}\, e^x.$$

(2) 设 $\sin x = t$, 则 $\cos x dx = dt$, 所以

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x dx = \int (1 - t^2)dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

(3) 设 $\tan x = t$, 则 $dx/\cos^2 x = dt$, 原式

$$\int \frac{dt}{a + bt^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + t^2}$$

$$= \frac{1}{b}\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\text{Arctan}\frac{t}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{1}{ab}\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\tan x\right).$$

(4) 若 $t = \tan(x/2)$, $\sin x = 2t/\left(1 + t^2\right)$, 因为 $dx = \left(2/\left(1 + t^2\right)\right)dt$, 所以原式

$$\int \frac{\frac{2}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right).$$

(5) 同上面的 (4) 一样, 若 $t=\tan(x/2)$, 则根据 $\cos x=\left(1-t^2\right)/\left(1+t^2\right)$, 原式

$$\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+a}\mathrm{d}t=\int\frac{2\mathrm{d}t}{(1-t^2)+a(1+t^2)}$$

$$=\int\frac{2\mathrm{d}t}{(a+1)+(a-1)t^2}=\frac{2}{a-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a-1}}\right)^2+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{x}{2}\right).$$

32. (1)

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2x(x^2+1)}-\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2(x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{x^2+1}+\mathrm{Arctan}\,x\right\}.$$

(2) 令 $I=\int e^{px}\cos qx\mathrm{d}x, J=\int e^{px}\sin qx\mathrm{d}x$, 并且进行分部积分法, 则 $I=\frac{1}{q}e^{px}\sin qx-\frac{p}{q}J$, $J=-\frac{1}{q}e^{px}\cos qx+\frac{p}{q}I$. 所以

$$I=\frac{e^{px}}{p^2+q^2}(q\sin qx+p\cos qx)$$

$$J=\frac{e^{px}}{p^2+q^2}(p\sin qx-q\cos qx).$$

(3) 若 $I_n=\int x^n e^{-x}\mathrm{d}x$, 根据 $I_0=-e^{-x}$ 及由分部积分法得到的递推公式

$$I_n=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}\quad(n\geqslant 1)$$

得

$$I_n=-x^n e^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-n(n-1)x^{n-2}e^{-x}-\cdots-n!xe^{-x}-n!e^{-x}.$$

(4) 根据分部积分法及倍角公式

$$\int\cos^4 x\mathrm{d}x=\sin x\cos^3 x+3\int\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sin 2x}{2}\frac{1+\cos 2x}{2}+3\int\frac{1-\cos 4x}{8}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}.$$

33. (1) 根据分部积分法

$$\int_0^1 x^\alpha\ln x\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

其中, 右边的第一项是 0, 第二项是 $-1/(\alpha+1)^2$.

(2) 根据习题 31 的 (3),

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=\left[\frac{1}{\sqrt{ab}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\tan x\right)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{\pi}{2}.$$

(3) 根据习题 31 的 (5),

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x+a}=\left[\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(4) 根据习题 32 的 (2), $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin ax\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+a^2}(-a\cos ax-\sin ax)\right]_0^{\infty}=\frac{a}{1+a^2}.$

34.

$$I=\int_0^{+\infty}|\sin x|\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x+\cdots,$$

并且, 因为

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2k\pi}+\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}),$$

$$\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-(2k+1)\pi}-\mathrm{e}^{-(2k+2)\pi}),$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}+\mathrm{e}^{-3\pi}+\cdots)\\&=\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{-\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}+\mathrm{e}^{-3\pi}+\cdots\end{aligned}$$

又因为 $\mathrm{e}^{-\pi}<1$, 所以这个等比级数收敛且其和为

$$I=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1+\mathrm{e}^{-\pi}}{2(1-\mathrm{e}^{-\pi})}.$$

35. 根据习题 26, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}=(-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, $H_n(x)$ 是 n 次多项式. 令

$$I_{m,n}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^m H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x^m\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

则根据分部积分法,

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=\left[(-1)^n x^m\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n m x^{m-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\\&=[-x^m H_{n-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}]_{-\infty}^{+\infty}+mI_{m-1,n-1}.\end{aligned}$$

又因为 $H_{n-1}(x)$ 是 x 的多项式, 所以此式的 $[\ ]_{-\infty}^{+\infty}$ 部分为零. 因此

$$I_{m,n}=mI_{m-1,n-1}.$$

(1) 当 $m<n$ 时,

$$\begin{aligned}I_{m,n}&=m!I_{0,n-m}\\&=m!(-1)^{n-m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=m!(-1)^{n-m}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0.\end{aligned}$$

(2) 当 $m=n$ 时,

$$I_{m,n}=n!I_{0,0}=n!\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=n!\sqrt{\pi}.$$

36. 当 f 恒等于 0 时成立, 所以假设 f 不为 0. t 的二次式

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_a^b(tf-g)^2\mathrm{d}x\\&=t^2\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\end{aligned}$$

关于 t 的判别式必须 $\leqslant 0$. 从而获得所要求的不等式.

37. 将 $[a,b]$ 分成 n 等份 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=b$, 并且设 $f(a_i)=x_i,\varphi(x_i)=y_i$, 则可以应用习题 29 的不等式, 得

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{y_1+\cdots+y_n}{n}.$$

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\frac{b-a}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\frac{b-a}{n}(y_1+\cdots+y_n).$$

其中, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\mathrm{d}x.$$

第 5 章

38. 令

$$A_n=\sum_{i=1}^n a_i,\quad B_n=\sum_{i=1}^n b_i,\quad B=\sum_{i=1}^\infty b_i$$

并且

$$\begin{aligned}C_n&=c_1+c_2+\cdots+c_n\\&=a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+\cdots+(a_1b_n+\cdots+a_nb_1)\\&=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1.\end{aligned}$$

若令 $B_n-B=\varepsilon_n$, 则当 $n\to\infty$ 时, $\varepsilon_n\to 0$.

一方面, $C_n=A_nB+(a_1\varepsilon_n+a_2\varepsilon_{n-1}+\cdots+a_n\varepsilon_1)$. 根据假设, 因为 $\sum a_n$ 绝对收敛. 所以对于任意的正实数 ε, 存在自然数 m, 使得当 $n>m$ 时, 就有 $|a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon$. 另一方面, 因为 $\{\varepsilon_n\}$ 收敛且有界, 所以存在 K 使得 $|\varepsilon_n|<K$ 成立. 此外设 $\max\{\varepsilon_{n-m},\varepsilon_{n-m+1},\cdots,\varepsilon_n\}=\eta_n$, 则若存在某个 n_0, 使得 $n>n_0$, 则 $\eta_n<\varepsilon$.

因此, 当 $n > n_0$ 时,

$$\begin{aligned}|C_n - A_nB| &\leqslant \eta_n(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|) + K(|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|)\\ &< \varepsilon(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|) + K\varepsilon.\end{aligned}$$

从而, $\lim C_n = \lim(A_nB) = (\lim A_n)B = AB$ 成立.

39. 当 $n \geqslant 2$ 时, 若令

$$a_n = \left\{\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n-2)}\right\}^p,$$

则

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{2n}}\right)^p\\ &= \left\{1 + \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \cdots\right\}^p = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

再将 Gauss 判别法应用到这里即可.

40. 根据下确界的定义, 从某一位 m 开始, 对于其前面的 n,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant \rho > 1$$

即

$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geqslant (\rho - 1)a_{n+1}$$

成立. 当 $n \geqslant m$ 时, 令 $n = m, m+1, \cdots, n$, 再将两边相加, 则得

$$ma_m - (n+1)a_{n+1} \geqslant (\rho - 1)\{a_{m+1} + \cdots + a_{n+1}\}.$$

所以

$$a_{m+1} + \cdots + a_{n+1} \leqslant \frac{1}{\rho - 1}(ma_m - (n+1)a_{n+1}) < \frac{1}{\rho - 1}ma_m.$$

这里, 令 $a_1 + \cdots + a_m = K$, 则部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < K + \frac{1}{\rho - 1}ma_m$$

有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 发散的情况也可同样证明.

41. 令

$$a_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}.$$

因为

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{b-a}{\dfrac{a}{n} + 1} \to b - a > 1,$$

所以根据习题 40 的 Raabe 判别法, 收敛性显然.

42. 若定积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}$ 的积分变量 t 替换为 $x = nt$, n 为自然数, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{n\mathrm{d}t}{x^2+n^2} = \frac{\pi}{2}$. 令 $f_n(x) = \frac{2}{\pi}\frac{n}{x^2+n^2}$, 则 $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 因为 $f_n(x) \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}$. 所以函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 0.

43. 令 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{x}{4}.$$

若 $x > 0$, 则根据 cauchy 判别法, $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 当 $x < 4$ 时收敛; 当 $x > 4$ 时发散. 所以, 所求的收敛半径为 4.

44. 当 $\sum f_n(x)$ 一致绝对收敛时, 对于在充分大的 n_0 前面的 n, 因为 $f_n^2(x) < |f_n(x)|$, 所以 $\sum f_n^2(x)$ 也一致收敛. 进而, 因为 $|f_n(x)| < 1/2$, 所以根据 $|\ln(1+f_n(x)) - f_n(x)| < f_n^2(x)$, $\sum \{\ln(1+f_n(x)) - f_n(x)\}$ 一致绝对收敛. 因此

$$\sum \ln(1+f_n(x)) = \sum\{\ln(1+f_n(x)) - f_n(x)\} + \sum f_n(x)$$

也一致绝对收敛. 因而, $\sum \ln(1+f_n(x)) = \ln\prod(1+f_n(x))$ 是关于 x 的连续函数. 故 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(x))$ 也是关于 x 的连续函数.

第 6 章

45. 显然 $f(x,y)$ 在 $(x,y) \neq (0,0)$ 处连续. 设 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 则

$$f(x,y) = \frac{r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta)}{r^2} = r(\cos^3\theta - \sin^3\theta),$$

从而当 $(x,y) \to (0,0)$ 时, $|f(x,y)| \leqslant 2r \to 0$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处也是连续. 显然, $f(x,y)$ 在 $(x,y) \neq (0,0)$ 处, 关于 x 和 y 都可偏微. 根据

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1,$$

$f(x,y)$ 在原点处也可偏微. 为了验证它在原点是否可微, 令

$$f(h,k) - f(0,0) = h - k + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$

[illegible]

$$\varepsilon(h,k) = \frac{hk(h-k)}{(\sqrt{h^2+k^2})^3},$$

例如, 若令 $h = mk$, 则

$$\varepsilon(h,k) = \frac{m(m-1)}{(\sqrt{m^2+1})^3},$$

从而当 $(h,k) \to (0,0)$ 时, $\varepsilon(h,k) \to 0$ 不成立. 因此, 在原点处不可微.

46. 因为可微的单变量函数 $f(x,y_0)$ 和 $f(x_0,y)$ 分别在 $x=x_0, y=y_0$ 处取最大 (或者最小) 值, 所以

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0$$

成立.

47. 设

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2+1},$$

求

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0,$$

得

$$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{或}\ (x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

则

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

并且

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{x+y}{x^2+y^2+1}=\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}(x^2+y^2+1)}\geqslant 0,$$

$$\frac{x+y}{x^2+y^2+1}-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2}(x^2+y^2+1)}\geqslant 0,$$

所以 $f(x,y)$ 的最大值为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 最小值为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

48. 在

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

中, 因为 $1-\cos x=2\sin^2 x\,(x/2)$, 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right),$$

因此, 得

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

49. 对

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+t}=\frac{\pi}{2\sqrt{t}},\quad (t>0)$$

的两边关于 t 取 $(n-1)$ 阶微分, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\mathrm{d}x}{(x^2+t)^n}&=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-2)\right)t^{-1/2-(n-1)}\\&=\frac{\pi}{2}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}1\cdot3\cdot5\cdot\ \cdots\ \cdot(2n-3)t^{-1/2-(n-1)}.\end{aligned}$$

这里, 因为

$$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)=\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

所以, 令 $t=1$, 则得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{2n-2}}\frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}.$$

50. 在 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 中用 $\sqrt{t}x$ 替换 x, 则

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

若将两边关于 t 取 n 阶微分, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(-x^2)^n\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-1)^n\frac{1}{2^n}1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)t^{-\frac{1}{2}-n}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}t^{-\frac{1}{2}-n},\end{aligned}$$

所以, 令 $t=1$, 则得

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}.$$

51. 将 tx 重新记为 x, 则

$$\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\sin^2(tx)}{tx^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

因此, 根据定理 6.21 的 (1),

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{+\infty}f\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(0)\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=f(0)\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0).$$

第 7 章

52. 例如, 设 $D=\{|x|\leqslant1,|y|\leqslant1\}$, 并且令

$$K_0=\left\{-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant0,|y|\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

当 $n\geqslant0$ 时, 令

$$K_{5n+1}=\left\{\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant x\leqslant\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}},\quad |y|\leqslant\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\right\},$$

$$K_{5n+2}=\left\{-\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2^{n+1}},\quad |y|\leqslant\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\right\},$$

$$K_{5n+3}=\left\{|x|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}},-\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\leqslant y\leqslant-\frac{1}{2^{n+1}}\right\},$$

$$K_{5n+4}=\left\{|x|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant y\leqslant\frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}}\right\},$$

当 $n\geqslant 1$ 时, 令

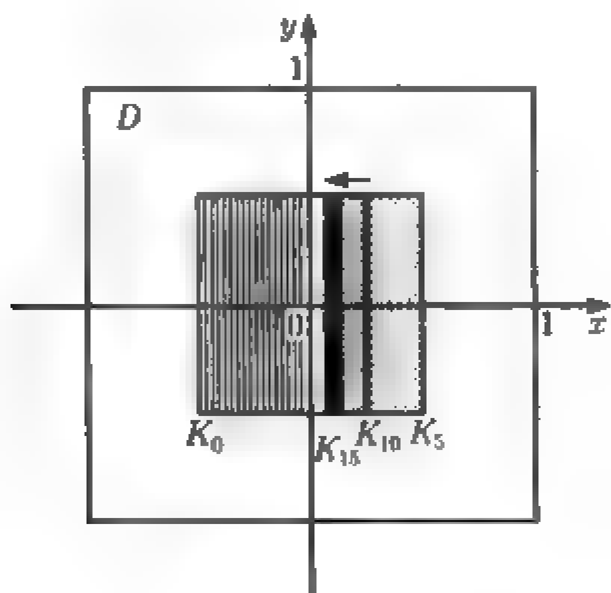
$$K_{5n}=\left\{\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2^n},|y|\leqslant\frac{1}{2}\right\}.$$

(参照下图) 则

$$\bigcup_{m\geqslant 0}K_m=D.$$

可是, 无论取什么样的 m, D 的子集 $\{(0,y);|y|\leqslant 1/2\}$ 都不含 $K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_m$ 的内点. 所以

$$\bigcup_{n\geqslant 0}(K_1\cup\cdots\cup K_n)\neq D.$$



53. 坐标变换: $(r,\theta)\to(x,y)=(1+r\cos\theta,r\sin\theta)$ 是从闭区域 $E=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 的内部映射到半圆 K 的内部的一一的连续可微映射. 此时, 因为 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$, 所以

$$\begin{aligned}\int_K x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_E(1+r\cos\theta)^2r\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^\pi(r^2\sin\theta+2r^3\sin\theta\cos\theta+r^4\cos^2\theta\sin\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1\left(2r^2+\frac{4}{3}r^4\right)\mathrm{d}r=\frac{14}{15}\end{aligned}$$

54. 坐标变换: $(u,v)\to(x,y)=(u,uv)$ 是从领域 $E=\{(u,v)|0<u<1,0<v<1\}$ 到领域 D 上的一一映射. 因为 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$, 所以

$$\int_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_E\frac{u\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2(1+v^2)}}=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

55. 坐标变换：$(u,v)\to(x,y)=(uv,v-uv)$ 是从领域 $E=\{(u,v)|0<u<1,1<v<\infty\}$ 到领域 D 上的一一的连续可微映射. 此时,

$$\int_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^s}=\int_E\frac{v\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{v^s}=\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}v}{v^{s-1}}\int_0^1\mathrm{d}u.$$

所以, 左边的积分当 $s>2$ 时绝对收敛. 当 $s\leqslant 2$ 时发散.

56. 坐标变换：$(r,\theta)\to(x,y)=\left(ar\cos^3\theta,br\sin^3\theta\right)$ 是从闭区域 $E=\{(r,\theta);0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 的内部到闭区域 K 的内部的一一的连续可微映射. 此时, 因为 $J(r,\theta)=3abr\sin^2\theta\cos^2\theta$, 所以 K 的面积是

$$\begin{aligned}\int_K\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant 1}}3abr\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=12ab\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\\&=12ab\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4\theta}{8}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}ab\pi.\end{aligned}$$

第 8 章

57. 在 $x^2=a^2u(1-v),y^2=b^2uv(1-w),z^2=c^2uvw$ 上有定义的坐标变换是从领域 $E=\{(u,v,w)|0<u<1,0<v<1,0<w<1\}$ 到领域 D 上一一的连续可微映射. 此时, 因为

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{8xyz}{(abc)^2}\frac{1}{u^2v},$$

所以

$$\begin{aligned}\int_D\frac{xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&=\frac{a^2b^2c^2}{8}\int_E\frac{u^2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{a^2u+(b^2-a^2)uv+(c^2-b^2)uvw}}\\&=\frac{a^2b^2c^2}{8}\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2v\mathrm{d}w}{\sqrt{a^2u+(b^2-a^2)uv+(c^2-b^2)uvw}}\\&=\frac{a^2b^2c^2}{8}\frac{2}{5}\frac{2}{c^2-b^2}\int_0^1(\sqrt{a^2+(c^2-a^2)v}-\sqrt{a^2+(b^2-a^2)v})\mathrm{d}v\\&=\frac{a^2b^2c^2}{15}\frac{1}{c^2-b^2}\left(\frac{c^3-a^3}{c^2-a^2}-\frac{b^3-a^3}{b^2-a^2}\right)\\&=\frac{a^2b^2c^2}{15}\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

58. 在 $x^{2/3}=X,y^{2/3}=Y,z^{2/3}=Z$ 上定义的坐标变换是从领域 $E=\{(X,Y,Z)|X+Y+Z<1,0<X<1,0<Y<1,0<Z<1\}$ 到领域(K) 的 $x>0,y>0,z>0$ 部分 (全体的八分之一) 的一一的连续可微映射. 此时, 因为 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)}=$

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 X^{1/2}Y^{1/2}Z^{1/2}$, 所以, 根据 (8.79) 式,

$$\int_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 8\int_E \frac{27}{8}X^{1/2}Y^{1/2}Z^{1/2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z = 27\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\Gamma\left(1+\frac{9}{2}\right)} = \frac{4\pi}{35}.$$

59. 极坐标变换. 令 $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$, 则

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^s} = \int_1^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^{2s}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^{2s-2}}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\pi\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^{2s-2}}.$$

这个积分当 $s > 3/2$ 时绝对收敛, 当 $s \leqslant 3/2$ 时发散.

60. 坐标变换: $x = u(1-v), y = uv(1-w), z = uvw$ 是从领域

$$E = \{(u,v,w)|a < u < b, 0 < v < 1, 0 < w < 1\}$$

到领域 D 的一一的连续可微映射. 此时,

$$\int_D f(x+y+z)x^{q-1}y^{r-1}z^{s-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_E f(u)(u(1-v))^{q-1}(uv(1-w))^{r-1}(uvw)^{s-1}u^2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$
$$= \int_a^b f(u)u^{q+r+s-1}\mathrm{d}u\int_0^1(1-v)^{q-1}v^{r+s-1}\mathrm{d}v\int_0^1(1-w)^{r-1}w^{s-1}\mathrm{d}w$$
$$= \left\{\int_a^b f(u)u^{q+r+s-1}\mathrm{d}u\right\}\mathrm{B}(q,r+s)\mathrm{B}(r,s)$$
$$= \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(q+r+s)}\int_a^b f(u)u^{q+r+s-1}\mathrm{d}u.$$

61. 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时, 结论显然成立.
当 $n=2$ 时, 令 $x_1 = uv, x_2 = u(1-v)$, 则将 $\{(u,v)\, a < u < b, 0 < v < 1\}$ 一一映射到 $\{(x_1,x_2)\,|x_1 > 0, x_2 > 0, a < x_1 + x_2 < b\}$ 上.

$$\int_D f(x_1+x_2)x_1^{q_1-1}x_2^{q_2-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_a^b f(u)u^{q_1+q_2-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{q_1-1}(1-v)^{q_2-1}\mathrm{d}v$$
$$= \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2)}{\Gamma(q_1+q_2)}\int_a^b f(u)u^{q_1+q_2-1}\mathrm{d}u.$$

现在, 领域 $D(x_1)$, 当 $0 < x_1 < a$ 时, 令

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_2 > 0, x_3 > 0,\cdots,x_n > 0, a - x_1 < x_2 + x_3 + \cdots + x_n < b - x_1\}$$

当 $a \leqslant x_1 < b$ 时, 令

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_2 > 0, x_3 > 0, \cdots, x_n > 0, 0 < x_2 + x_3 + \cdots + x_n < b - x_1\}$$

则需要证明的等式的左边

$$= \int_0^a x_1^{q_1-1} \mathrm{d}x_1 \int_{D(x_1)} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) x_2^{q_2-1} \cdots x_n^{q_n-1} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$+ \int_a^b x_1^{q_1-1} \mathrm{d}x_1 \int_{D(x_1)} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) x_2^{q_2-1} \cdots x_n^{q_n-1} \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^a x_1^{q_1-1} \mathrm{d}x_1 \left\{ \frac{\Gamma(q_2) \cdots \Gamma(q_n)}{\Gamma(q_2 + \cdots + q_n)} \int_{a-x_1}^{b-x_1} f(u_1 + x_1) u_1^{q_2 + \cdots + q_n - 1} \mathrm{d}u_1 \right\}$$

$$+ \int_a^b x_1^{q_1-1} \mathrm{d}x_1 \left\{ \frac{\Gamma(q_2) \cdots \Gamma(q_n)}{\Gamma(q_2 + \cdots + q_n)} \int_0^{b-x_1} f(u_1 + x_1) u_1^{q_2 + \cdots + q_n - 1} \mathrm{d}u_1 \right\}$$

$$= \frac{\Gamma(q_2) \cdots \Gamma(q_n)}{\Gamma(q_2 + \cdots + q_n)} \int_{\substack{x_1 > 0, u_1 > 0 \\ a < x_1 + u_1 < b}} f(u_1 + x_1) u_1^{q_2 + \cdots + q_n - 1} x_1^{q_1-1} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}x_1$$

$$= \frac{\Gamma(q_2) \cdots \Gamma(q_n)}{\Gamma(q_2 + \cdots + q_n)} \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2 + \cdots + q_n)}{\Gamma(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)} \int_a^b f(u) u^{q_1 + q_2 + \cdots + q_n - 1} \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(q_2) \cdots \Gamma(q_n)}{\Gamma(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)} \int_a^b f(u) u^{q_1 + q_2 + \cdots + q_n - 1} \mathrm{d}u.$$

62. 坐标变换: $X_1 = x_1^2, X_2 = x_2^2, \cdots, X_n = x_n^2$ 是从领域 $E = \{(X_1, X_2, \cdots, X_n) | X_1 > 0, X_2 > 0, \cdots, X_n > 0, 1 < X_1 + X_2 + \cdots + X_n < \infty\}$ 到领域 $\Delta = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 1\}$ 上的一一的连续可微映射. 此时,

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^s} = 2^n \int_\Delta \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n}{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^s}$$

$$= \int_E \frac{1}{(x_1 + X_2 + \cdots + X_n)^s} X_1^{-1/2} X_2^{-1/2} \cdots X_n^{-1/2} \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}X_2 \cdots \mathrm{d}X_n.$$

将习题 61 应用到这里, 则

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{s-n/2+1}} \mathrm{d}u.$$

这个积分当 $s > n/2$ 时绝对收敛, 当 $s \leqslant n/2$ 时发散. 当 $s > n/2$ 时积分值为

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{2}{2s - n}.$$

第 9 章

63. 因为 $x=\dfrac{y^2}{4a}$, 所以 $\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}=\dfrac{1}{2a}\sqrt{y^2+4a^2}$, 因此所求长度

$$l=\frac{1}{2a}\int_0^y\sqrt{y^2+4a^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2a}\frac{1}{2}[y\sqrt{y^2+4a^2}+4a^2\ln(y+\sqrt{y^2+4a^2})]_0^y$$
$$=\frac{1}{4a}y\sqrt{y^2+4a^2}+a\ln\frac{y+\sqrt{y^2+4a^2}}{2a}.$$

64. 直接代入 (9.8) 式,

$$l=\int_0^1\sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2+(2t)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\sqrt{9t^4+4\pi^2t^2+4t^2}\mathrm{d}t$$
$$=3\int_0^1 t\sqrt{t^2+\frac{4\pi^2+4}{9}}\mathrm{d}t=\frac{1}{27}((\sqrt{13-4\pi^2})^3-(\sqrt{4+4\pi^2})^3).$$

65. 以 θ 作为参数, 令 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta-r\sin\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta+r\cos\theta,$$

所以

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2,$$

因此

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2}\mathrm{d}\theta.$$

66. 直接在习题 65 中令 $r=a(1-\cos\theta)$, 则

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+r^2=2a^2(1-\cos\theta)=4a^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

所以

$$l=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a.$$

索　引

微积分入门 II 多元微积分

An Introduction to Calculus



本书译自小平邦彦的《解析入門 II》，主要阐述多元微积分，各部分内容简洁而流畅。本书以严格的实数理论为基础，有别于通常的分析教科书。作为一部经典著作，它处处体现了作者卓越的才识和对微积分的深刻体会与独到见解。叙述中兼顾了严密性和直观性，表述非常精练，而内容却又十分丰富。

本书是小平邦彦晚年为后人留下的一份重要的文化财富，不仅值得数学专业的人士研读，而且对于需要微积分知识的其他理工科学生和专业人员，也是非常优秀的教材和重要的参考书。



小平邦彦（Kunihiko Kodaira） 20 世纪日本最伟大的数学家之一，他是迄今为止为数不多的既获得菲尔兹奖（1954年）、又获得沃尔夫奖（1985 年）的数学家。1957 年被日本政府授予文化勋章。他是日本学士院院士、美国国家科学院和哥廷根科学院外籍院士。先后在美国普林斯顿高等研究中心、哈佛大学、约翰·霍普金斯大学、斯坦福大学、日本东京大学等任教授。他在调和积分理论、代数几何学和复解析几何学等诸多领域做出了卓越的贡献，著作有《微积分入门》(I 和 II)、《复分析》、《复流形理论》等。人民邮电出版社同时推出了《复分析》的英文影印版。



微积分入门 I：一元微积分
ISBN 978-7-115-17261-7

本书相关信息请访问：
图灵网站 http://www.turingbook.com
读者 / 作者热线：(010) 88593802
反馈 / 投稿 / 推荐信箱：contact@turingbook.com

分类建议 数学 / 微积分

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn



ISBN 978-7-115-18373-6/O1
定价：39.00 元